



Institut MONTEFIORE
Service de Télécommunications et d'Imagerie

ELEN017-0
Analyse et conception des systèmes de
télécommunications

Professeur Marc VAN DROOGENBROECK

Octobre 2008 (version 3.93)

Remerciements

Merci à J.-M. WAGNER, à F. LAPIERRE , à C. DEMOULIN et à V. PIERLOT pour leur aide précieuse et pour leur dévouement. Merci également à G.-B. STAN pour ses commentaires et à V. BROUN pour la réponse en gain du filtre ADSL.

Marc VAN DROOGENBROECK

Notations

Cadre analytique :

\mathbb{N}	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{Z}	$\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{R}	Ensemble des réels

Constantes :

j	Vecteur unité de l'axe imaginaire $j = \sqrt{-1}$
k_B	Constante de BOLTZMANN = $1,38 \times 10^{-23}$ JOULE / degré KELVIN

Variables et fonctions :

t	Variable de temps continue
f	Variable fréquence
ω	Variable de pulsation $\omega = 2\pi f$
T	Période d'un signal
T_0	Période fondamentale d'un signal
Δx	Pas d'échantillonnage en x
Δy	Pas d'échantillonnage en y
$x(t)$	Fonction à valeurs continues, définie pour tout temps t
$h(t)$	Réponse impulsionnelle d'un système
$\mathcal{H}(f)$	Transmittance d'un système linéaire
$f[n]$	Fonction échantillonnée, fonction discrète

Variables et fonctions de modulation :

$m(t)$	Signal modulant, normalisé à 1 : $ m(t) \leq 1$
$s(t)$	Signal modulé
k_a	Taux de modulation
β	Indice de modulation
E_b	Énergie par bit
D	Débit binaire $[b/s]$
R	Rapidité de modulation $[baud]$

Notations fonctionnelles :

$ a $	Valeur absolue
\vec{a}	Vecteur
$\ a\ $	Norme de a
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Produit scalaire de \vec{a} et \vec{b}
$\vec{a} \times \vec{b}$	Produit vectoriel de \vec{a} et \vec{b}
$\nabla \cdot \vec{a}$	Divergence de \vec{a}
$\nabla \times \vec{a}$	Rotationnel de \vec{a}
$\nabla^2 \varphi$	Laplacien de φ
$\nabla \varphi$	Gradient de φ
X^*	Complexe conjugué de X
$Re(a)$	Partie réelle de a
$Im(a)$	Partie imaginaire de a
$\mathcal{X}(f)$	Transformée de FOURIER du signal $x(t)$
\rightleftharpoons	Correspondance entre un signal et sa transformée
\otimes	Convolution
\oplus	OU exclusif ou addition modulo-2
$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(x)$	Sinus cardinal de x
$\delta(\cdot)$	Fonction delta de DIRAC
$J_n(x)$	Fonction de BESSEL d'ordre n
$\text{erfc}(\cdot)$	Fonction erreur complémentaire

Fonctions stochastiques :

$p(A)$	Probabilité de A
\bar{a}	Valeur moyenne de a
μ_X	Espérance mathématique du signal X
σ_X^2	Variance de X
$\Gamma_{XX}(\tau)$	Fonction d'autocorrélation du processus aléatoire stationnaire $X(t)$
$\gamma_X(f)$	Densité spectrale de puissance de $X(t)$
N_0	Densité spectrale de puissance de bruit

Table des matières

Remerciements	i
Notations	ii
Introduction	1
I Modélisation des systèmes de télécommunications en vue de l'exploitation par simulations numériques	3
1 Théorie de l'estimation et estimation spectrale	5
1.1 Introduction	5
1.1.1 Théorie de l'estimation	5
1.1.2 Rappels de quelques grandeurs associées aux processus stochastiques	5
1.1.3 Estimation spectrale	6
1.2 Définitions	7
1.2.1 Séquence stochastique	7
1.2.2 Transformée de FOURIER discrète	7
Spectre d'une séquence déterministe	7
Convergence	9
Énergie	11
Séquence périodique	11
1.2.3 Transformée de FOURIER discrète	11
1.2.4 Observation spectrale	12
Précision	12
Résolution en fréquence	13
Spectre à court terme	15
1.2.5 Spectre d'une séquence aléatoire	16
1.3 Énoncé du problème de l'estimation	17
1.3.1 Estimateur	17
1.3.2 Propriétés d'un bon estimateur	18
1.3.3 Estimateur à maximum de vraisemblance	18
Intervalle de confiance	19
1.3.4 Un exemple : estimation de la moyenne	19
Biais de $\hat{\mu}_x$?	19
Variance de $\hat{\mu}_x$?	20
1.4 Estimation spectrale	20
1.4.1 Introduction	20

1.4.2	Estimateur biaisé de la séquence d'autocorrélation	22
1.4.3	Estimateur simple de la densité spectrale de puissance : le périodigramme . .	22
1.4.4	Effet de fenêtrage	23
2	Représentation des signaux et des systèmes passe-bande	25
2.1	Introduction	25
2.1.1	Échantillonnage des signaux passe-bande	26
2.2	Représentation des signaux passe-bande déterministes	27
2.2.1	Signaux modulés	28
	Modulation numérique d'amplitude à 2^n états	28
	Modulation numérique de phase à 2^n états	28
2.2.2	Signal analytique	29
	Propriétés de la transformée de HILBERT	30
	Transformée de HILBERT d'un signal modulé	31
	Représentation passe-bas à partir du signal analytique	31
	Décomposition de RICE	32
	En pratique	33
2.3	Systèmes linéaires, invariants en translation et passe-bande	34
2.3.1	Illustration : démodulation d'un signal FM	35
2.4	Représentation des signaux passe-bande aléatoires	39
2.4.1	Signal analytique d'un processus stochastique	39
2.4.2	Enveloppe complexe d'un processus stochastique	40
2.4.3	Lien entre un processus stochastique et son enveloppe complexe	41
2.4.4	Décomposition de RICE d'un processus stochastique	41
3	Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications	43
3.1	Introduction	43
3.2	Sources physiques de bruit	43
3.2.1	Bruit thermique	43
	Formules de NYQUIST	43
	Dépendance fréquentielle	44
	Généralisation à un dipôle d'impédance complexe	44
3.3	Caractérisation d'un dipôle	44
3.3.1	Puissance disponible	45
	Cas des signaux sinusoïdaux	45
	Cas des processus stochastiques	45
	Résumé	46
3.3.2	Température de bruit d'un dipôle linéaire	46
	Température de bruit ponctuelle	46
	Température de bruit	47
3.3.3	Rapport signal à bruit d'un dipôle générateur	47
3.4	Caractérisation d'un quadripôle	47
3.4.1	Notion de gain	48
3.4.2	Facteur de bruit d'un quadripôle	48
	Introduction	48
	Interprétation de la notion de facteur de bruit	49
	Circuits équivalents	49
	Facteur de bruit moyen	50

	Facteur de mérite	50
3.4.3	Température de bruit effective du quadripôle	51
3.4.4	Lien entre facteur de bruit et température effective	51
3.4.5	Cas particulier : quadripôle atténuateur résistif	51
3.5	Cascade de quadripôles	52

II Aspects systèmes des chaînes télécommunications 53

4 Modulations numériques 55

4.1	Introduction	55
4.2	Définition des modulations numériques	55
4.2.1	Formulation générale	55
4.2.2	Typologie des modulations	56
4.3	Modulations linéaires “classiques”	56
4.3.1	Description	56
4.3.2	Calcul de la densité spectrale de puissance	57
	Densité spectrale du puissance du signal modulé	57
	Fonction d’autocorrélation.	58
	Densité spectrale de puissance.	58
	Densité spectrale de l’enveloppe complexe	58
	La densité spectrale en conclusion	59
4.3.3	Modulation d’amplitude numérique (Amplitude Shift Keying)	59
	Description	59
	Cas particulier : modulation d’amplitude numérique à deux états (ASK-2)	60
	Densité spectrale de puissance de l’ASK-2	60
4.3.4	Modulation de phase numérique (Phase Shift Keying)	61
	Description	61
	Cas particulier : modulation PSK-2 ou BPSK	62
	Densité spectrale de puissance.	62
4.3.5	Modulation en quadrature de phase (Quadrature Phase Shift Keying)	62
	Description	62
	Modulateur QPSK	64
	Démodulateur QPSK	66
	Densité spectrale de puissance	66
4.4	Modulations linéaires à décalage (Offset)	67
4.4.1	Description	67
4.4.2	Calcul de la densité spectrale de puissance	67
4.4.3	Modulation en quadrature de phase à décalage (Offset Quadrature Phase Shift Keying)	69
	Description	69
	Modulateur et démodulateur OQPSK	70
	Densité spectrale de puissance	71
4.4.4	Modulation à saut de phase minimum (Minimum Shift Keying)	72
	Description	72
	Densité spectrale de puissance	75

5	Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symboles	77
5.1	Définition de l'interférence inter-symboles	77
5.2	Critère de NYQUIST	80
5.2.1	Canal idéal de NYQUIST	81
5.2.2	Impulsion en cosinus surélevé	85
6	Étalement de spectre	87
6.1	Introduction	87
6.1.1	Techniques d'étalement	87
6.2	Étalement direct	88
6.2.1	Principes de base de l'étalement direct	88
6.2.2	Génération des séquences pseudo-aléatoires	90
	Propriétés d'une séquence de longueur maximale	91
	Choix d'une séquence de longueur maximale	93
6.2.3	Principe de la transmission en bande de base	94
6.2.4	Étalement direct par modulation BPSK	98
	Bruit	98
	Analyse	99
6.3	Étude des performances	101
6.3.1	Gain d'étalement	101
6.3.2	Probabilité d'erreur	101
6.3.3	Marge d'interférence	102
6.3.4	Capacité d'un système à étalement de spectre	103
7	Multiplexage et accès au multiplex	105
7.1	Introduction	105
7.1.1	Multiplexage	105
7.1.2	Accès multiple	105
7.2	Multiplexage par répartition en fréquences	106
7.2.1	Principe	106
7.2.2	Bande passante	106
7.2.3	Accès au multiplex	108
7.2.4	Exemple : multiplex de téléphonie analogique entre centraux	108
7.3	Multiplexage par répartition temporelle	108
7.3.1	Principe	108
7.3.2	Bande passante	111
7.3.3	Accès au multiplex	111
7.3.4	Exemple de multiplexage temporel : système téléphonique numérique PCM 30 voies européen	112
	Caractéristiques	112
	Structure de la trame	112
	Rôle des IT	113
7.4	Multiplexage par répartition de codes	113
7.4.1	Séquences de GOLD	116
7.5	Discussion	116
7.5.1	Combinaison de techniques de multiplexage	116
7.5.2	Comparaison de normes de mobilophonie	117

8	Étude du trafic	119
8.1	Introduction	119
8.1.1	Caractérisation du trafic	120
	Intensité, trafic et charge : quelles mesures ?	120
	Charge.	121
	Charge de référence.	122
8.2	Analyse statistique des appels	123
8.2.1	Processus de dénombrement	123
8.2.2	Variable aléatoire de POISSON : définition et propriétés	124
8.2.3	Processus de POISSON	126
8.2.4	Temps entre occurrences	126
8.2.5	Temps de communication	128
	Hypothèse 1 : temps de communication constant	128
	Hypothèse 2 : temps de communication à décroissance exponentielle	128
8.3	Lois d'analyse du trafic	129
8.3.1	Modèle d'un système avec perte (sans mémoire) : statistique d'ERLANG B	129
	Nombre de tentatives d'appel	129
	Nombre d'arrêts d'appel (relâchements de ligne)	129
	Charge	129
	Formule d'ERLANG B.	131
	Interprétation.	131
	Dimensionnement.	132
	Table.	132
	Tentatives et essais reconduits.	132
8.3.2	Autres modèles	134

III Éléments de la couche physique 135

9	Transmission sur ligne à paires symétriques et réseau téléphonique	137
9.1	Introduction	137
9.1.1	Limitations	137
9.1.2	Probabilité d'erreur par paquet	138
9.2	Transmission par ligne	138
9.2.1	Définitions	138
9.2.2	Propriétés électriques du cuivre	139
	Résistance	139
	Capacitance	139
	Inductance	140
9.2.3	Propagation	140
9.2.4	Modèle électrique	140
	Paramètres primaires	141
	Équations des télégraphistes	141
	Cas particulier 1 : ligne sans perte	141
	Cas particulier 2 : régime permanent	142
	Paramètres secondaires	142
	Relations entre les paramètres primaires et secondaires	143
9.2.5	Étude fréquentielle des paramètres	143

9.3	Exemples de lignes	144
9.3.1	Lignes à paires symétriques	144
	Comportement des câbles téléphoniques à basses fréquences	144
	Comportement des câbles téléphoniques à hautes fréquences	145
	Lignes pour transmissions numériques	145
9.3.2	Lignes à paires coaxiales	145
	Constitution	145
	Propriétés	146
9.4	Réseau téléphonique	146
9.5	Fonctions de transfert de puissance diaphoniques et transmission à haut débit	149
9.5.1	Principe	149
9.5.2	Diaphonie dans le réseau téléphonique	150
	Modèle des capacités non équilibrées	150
	Notions de circuit.	151
	Calcul des relations entre courants et tensions.	151
	Modèle des inductances non équilibrées	154
	Conclusion	154
9.5.3	Calcul du NEXT	155
9.5.4	Calcul du FEXT	157
9.5.5	Rapport signal sur bruit	157
9.5.6	Influence du nombre de perturbateurs	158
9.6	Estimation de la capacité de canal	158
9.6.1	Information, incertitude et entropie	158
	Notion d'information	158
	Notion d'entropie	159
9.6.2	Canal discret sans mémoire	159
	Modèle de canal	160
9.6.3	Information mutuelle	160
9.6.4	Capacité de canal	161
	Estimation de la capacité d'un canal binaire symétrique	161
	Influence du type de modulation	162
	Généralisation au cas continu et second théorème de SHANNON	163
10	Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres	165
10.1	Introduction	165
10.1.1	Sensibilité du mobile et qualité de service	166
10.2	Modèle général de propagation	167
10.2.1	Introduction	167
10.2.2	Modèle	169
10.2.3	Affaiblissement de parcours	169
10.2.4	Masquage	169
	Base physique	169
	Densité de probabilité d'une loi log-normale.	170
	Impact sur la zone de couverture en bordure d'une cellule	171
10.2.5	Évanouissement	172
	Évanouissement en l'absence d'un trajet direct	172
	Densité de probabilité.	174
	Densité de probabilité marginale de l'enveloppe.	175

	Densité de probabilité marginale de la phase.	176
	Données expérimentales.	176
	Évanouissement en présence d'un trajet direct	176
	Densité de probabilité.	178
	Densité de probabilité marginale de l'enveloppe.	178
10.2.6	Autres lois d'affaiblissement	179
10.2.7	Effet DOPPLER	179
	Spectre DOPPLER classique	181
10.3	Modèles empiriques	183
10.3.1	Types d'environnement	183
10.3.2	Types de cellule	183
10.3.3	Influence de la hauteur des antennes	184
10.3.4	Modèles macrocellulaires	185
10.3.5	Propagation à l'intérieur des bâtiments	186
	Propagation "extérieur-intérieur"	186
	Propagation "intérieur-intérieur"	186
A	Quelques résultats	189
A.1	Gain et atténuation	189
A.2	Notation phasorielle	189
A.2.1	Impédance complexe	190
A.2.2	Puissance en régime sinusoïdal	190
A.3	Adaptation d'impédance	191
	Glossaire	196

Introduction

Ces notes abordent plusieurs questions avancées des systèmes de télécommunications ; elles comportent trois parties consacrées aux thèmes suivants :

1. les aspects de *modélisation en vue de l'exploitation par simulations numériques*.
2. les aspects de *système*.
3. les aspects avancés relatifs à la *couche physique* du modèle OSI.

Dans la partie relative à la modélisation, il s'agit d'analyser les points clés intervenant lors de l'utilisation et lors de la conception de logiciels de télécommunications. Nous parcourons les thèmes de l'estimation spectrale, de la représentation des signaux modulés en termes de passe-bas équivalent et de la manière de considérer un bruit dans un modèle. Cette même partie approfondit la caractérisation des signaux numériques modulés ainsi que les considérations de transmission de signaux numériques dans un canal.

Les ressources étant limitées, il convient de les partager au mieux. Dans la partie consacrée aux aspects système, nous étudions les différents moyens usuels de partager les ressources (par répartition de fréquence ou répartition temporelle) ainsi que le procédé plus récent de partager par étalement de spectre au moyen de codes. L'étude du partage des ressources est doublée d'une étude du trafic débouchant sur des règles de dimensionnement applicable au trafic téléphonique.

La dernière partie est consacrée à l'étude d'éléments de la couche physique. Nous analyserons les détails de la transmission sur lignes à paires torsadées en présence de diaphonie ainsi que la manière de traiter les phénomènes d'évanouissement et les bilans de puissance dans le contexte de transmissions mobiles.

Première partie

Modélisation des systèmes de télécommunications en vue de l'exploitation par simulations numériques

Chapitre 1

Théorie de l'estimation et estimation spectrale

1.1 Introduction

Si par le passé les développements théoriques primaient, l'extraordinaire puissance des ordinateurs fait qu'une série de problèmes insolubles analytiquement trouvent une solution sous forme de simulations. On peut songer en particulier à tous les phénomènes non-linéaires pour lesquels on procédait par linéarisation pour obtenir des solutions pratiques. Aujourd'hui, les simulations permettent d'aborder toute une série de problèmes nouveaux.

1.1.1 Théorie de l'estimation

La difficulté majeure d'une approche par simulation réside moins dans la puissance nécessaire que dans l'approche de modélisation. Un élément-clef de cette phase de modélisation est la caractérisation des phénomènes stochastiques, soit de séquences aléatoires s'il s'agit de signaux échantillonnés.

Une description possible des séquences aléatoires consiste à en déterminer les différents moments. Parfois même, les moments des deux premiers ordres suffisent pour la modélisation¹.

Dans ce chapitre, nous abordons la question de l'estimation de certains paramètres d'une séquence aléatoire. Il s'agit principalement d'estimer la moyenne, la fonction d'autocorrélation, la fonction d'intercorrélation ou leur éventuel équivalent dans le domaine fréquentiel. Les techniques d'évaluation de ces grandeurs cadrent dans le domaine de la *théorie de l'estimation* [15].

1.1.2 Rappels de quelques grandeurs associées aux processus stochastiques

Soit un processus stochastiques $X(t, \omega)$. On distingue les grandeurs suivantes :

– *Moyenne temporelle*

$$\mu_X(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (1.1)$$

Il s'agit en fait d'une moyenne temporelle d'une réalisation.

– *Moyenne statistique*

$$\mu_X(t) = E \{X(t)\} \quad (1.2)$$

¹Dans le cas de processus aléatoires gaussiens stationnaires, les moments des deux premiers ordres suffisent à définir complètement la densité de probabilité conjointe et, par conséquent, le processus [8].

Cette moyenne est la moyenne statistique de la variable aléatoire au temps t . Bien entendu, elle ne peut s'obtenir que par modélisation puisqu'elle fait intervenir les valeurs de toutes les réalisations possibles au temps t .

– *Autocorrélation*

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} \quad (1.3)$$

Dans la mesure où le processus est *stationnaire* au sens large, on a

$$\mu_X(t) = \mu_X = \text{constante} \quad (1.4)$$

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = \Gamma_{XX}(t_2 - t_1) = \Gamma_{XX}(\tau) \quad (1.5)$$

On définit encore la *densité spectrale (de puissance)* comme la transformée de FOURIER de la fonction d'autocorrélation

$$\gamma_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{XX}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (1.6)$$

La puissance d'un processus stationnaire et ergodique $E\{X^2(t)\}$ vaut alors $\Gamma_{XX}(0)$.

1.1.3 Estimation spectrale

L'analyse des systèmes de télécommunications comporte souvent l'étude de l'occupation spectrale ; c'est un critère de comparaison important. On sait par exemple que le passage de l'analogique au numérique entraîne généralement un accroissement de la bande passante ; en contrepartie, le signal numérique offre une meilleure résistance au bruit.

Dans le cas d'un signal déterministe placé à l'entrée d'un système linéaire invariant en temps, la détermination de la bande occupée par le signal est relativement aisée. La question est plus délicate quand il s'agit d'étudier les signaux numériques. En effet, on est souvent amené à émettre des hypothèses sur le fonctionnement du système de télécommunications (type de bruit, transmittance du canal, ...) pour arriver à une formulation analytique. Dans certains cas, il n'est pas possible de choisir préalablement un jeu d'hypothèses. On procède alors par modélisation, mesure, validation et interprétation du résultat. C'est là tout l'enjeu de la théorie de l'estimation.

Quant il s'agit d'estimer la densité spectrale de puissance ou la transformée de FOURIER à laquelle elle se ramène sous certaines hypothèses, on parle d'*estimation spectrale*.

L'estimation spectrale est un domaine important de traitement numérique des signaux et de nombreux ouvrages abordent la question [5, 6, 15]. Il s'agit en fait de déterminer la densité spectrale de puissance, vu l'importance physique qu'elle représente. Le contexte de l'estimation spectrale tient principalement à trois observations

- *le processus à analyser est de nature aléatoire*. Son observation résulte en une séquence aléatoire qui correspond à une trajectoire parmi toutes les trajectoires possibles. Il convient donc de compléter l'observation d'une série d'hypothèses, typiquement la stationnarité au sens strict ou au sens large et l'ergodisme, pour établir une correspondance entre la trajectoire observée et le processus sous-jacent ;
- *l'observation du processus est limitée dans le temps*. Dès lors, l'intégration temporelle qu'effectue la transformée de FOURIER se limite à un intervalle de temps. Cette limitation entraîne un effet bien connu de fenêtrage, ce qui affecte l'allure des résultats. Plus fondamentalement, on est en droit de s'interroger sur la validité d'une estimation effectuée sur base d'un intervalle temporel plus ou moins long dans la mesure où les processus physiques considérés ne sont pas réellement stationnaires.
- *l'observation s'effectue par échantillonnage temporel*. On doit donc tenir compte des effets induits par l'échantillonnage tant au niveau du repli de spectre qu'au niveau de la réalisation de l'implémentation (ajout de valeurs nulles dans la séquence pour augmenter la résolution, etc).

Par la suite, nous allons principalement nous concentrer sur l'estimation de paramètres d'une séquence échantillonnée.

1.2 Définitions

1.2.1 Séquence stochastique

On part d'un processus stochastique $X(t)$ préalablement échantillonné. La séquence d'échantillons ainsi obtenus est notée $X[n]$. L'observation d'une trajectoire possible parmi toutes les trajectoires possibles fournit un signal $x[n]$; on parle d'une *réalisation* du processus.

Le processus $X[n]$ est entièrement décrit si, quel que soit le choix des indices n_1, n_2, \dots, n_m , on connaît la fonction de densité de probabilité conjointe de $X[n_1], X[n_2], \dots, X[n_m]$. Ce n'est généralement pas le cas.

On étend sans peine les notions valables pour les processus continus à des séquences. Ainsi, on dira d'une séquence qu'elle est *stationnaire au sens large* si

$$E \{X[n]\} = \mu \quad (1.7)$$

et

$$\Gamma_{XX}[n, n+k] = E \{X^*[n]X[n+k]\} = \Gamma_{XX}[k] \quad (1.8)$$

Dès lors que la séquence est stationnaire au sens strict large, sa moyenne est une constante et sa fonction d'autocorrélation dépend uniquement de l'écart temporel entre les variables échantillonnées.

Exemple. *Porteuse modulée par une phase aléatoire Θ .*

Soit la séquence aléatoire suivante,

$$X[n] = A_c \cos(2\pi f_c n + \Theta) \quad (1.9)$$

où A_c et f_c sont des constantes et Θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$. Par calcul,

$$E \{X[n]\} = 0 \quad (1.10)$$

et

$$\Gamma_{XX}[n, n+k] = E \{X^*[n]X[n+k]\} \quad (1.11)$$

$$= \frac{A_c^2}{2} \cos(2\pi f_c k) \quad (1.12)$$

ce qui signifie qu'il s'agit bien d'un processus stationnaire au sens large.

1.2.2 Transformée de FOURIER discrète

Spectre d'une séquence déterministe

Prenons une séquence déterministe $x[nT_s]$ non périodique et échantillonnée avec une période T_s .

Définition 1 [Transformée de FOURIER à temps discret] La transformée de FOURIER à temps discret (dtFT) de cette séquence est définie par

$$\mathcal{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s] e^{-2\pi j f n T_s} \quad (1.13)$$

Il ne s'agit ni plus ni moins que de la transformée de FOURIER du signal échantillonné. En effet, la fonction échantillonnée $x_s(t)$ est liée au signal sous-jacent par la relation

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s] \delta(t - nT_s) \quad (1.14)$$

La transformée de FOURIER de ce signal vaut

$$\mathcal{X}_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s] \delta(t - nT_s) e^{-2\pi jft} dt \quad (1.15)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s] \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) e^{-2\pi jft} dt \quad (1.16)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s] e^{-2\pi jfnT_s} \quad (1.17)$$

On remarquera que cette fonction est continue et périodique de période $f_s = \frac{1}{T_s}$; la connaissance de cette fonction sur l'intervalle $[0, f_s[$ suffit donc. En effet,

$$\mathcal{X}(f + f_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s] e^{-2\pi j(f+f_s)nT_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s] e^{-2\pi jfnT_s} e^{-2\pi jn} = \mathcal{X}(f) \quad (1.18)$$

Ce phénomène est bien connu : l'échantillonnage dans le domaine temporel entraîne l'apparition de copies de la transformée au droit des fréquences multiples de f_s . Il est d'usage de définir une *fréquence normalisée* ou *fréquence réduite* F par

$$F = \frac{f}{f_s} \quad (1.19)$$

de sorte que F parcourt l'intervalle $[0, 1[$ ou $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Si en plus de l'utilisation de la fréquence normalisée, on adopte l'écriture $x[n]$ en lieu et place de $x[nT_s]$, la transformée de FOURIER à temps discret s'exprime sous la forme normalisée suivante.

Définition 2 [*Transformée de FOURIER à temps discret normalisée*]

$$\mathcal{X}(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-2\pi jFn} \quad (1.20)$$

On déduit la formule inverse

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{X}(F) e^{2\pi jFn} dF \quad (1.21)$$

ou

$$x[n] = \int_0^1 \mathcal{X}(F) e^{2\pi jFn} dF \quad (1.22)$$

Convergence

On montre [5, page 45] que si la séquence $x[n]$ est de module sommable, c'est-à-dire si

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|x[n]\| < +\infty \quad (1.23)$$

la transformée converge uniformément vers une fonction continue de F .

Si, par contre, $x[n]$ est de carré sommable, à savoir

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|x[n]\|^2 < +\infty \quad (1.24)$$

sans être de module sommable, alors la série converge en moyenne quadratique. Il peut ne pas y avoir convergence uniforme. La fonction $\|\mathcal{X}(f)\|^2$ est désignée par le terme de *spectre*. Dans la littérature, ce terme est aussi associé à la fonction $\|\mathcal{X}(f)\|$. Les deux expressions deviennent équivalentes si l'on utilise l'échelle logarithmique des décibels.

Exemple. *Transformée de FOURIER d'un signal rectangulaire.*

Considérons une fonction rectangulaire $rect_N[n]$ valant 1 pour $n \in \{-N, \dots, N\}$ et 0 ailleurs. On calcule alors

$$\mathcal{X}(F) = \sum_{n=-N}^N x[n] e^{-2\pi j F n} \quad (1.25)$$

$$= e^{2\pi j F N} (1 + \dots + e^{-2\pi j F (2N+1)}) \quad (1.26)$$

$$= e^{2\pi j F N} \frac{(1 - e^{-2\pi j F (2N+1)})}{1 - e^{-2\pi j F}} \quad (1.27)$$

$$= \frac{\sin((2N+1)\pi F)}{\sin(\pi F)} \quad (1.28)$$

Ce signal est purement réel ; il est représenté à la figure 1.1 pour deux valeurs de N .

La transformée inverse a pour expression

$$x[n] = \int_0^1 \mathcal{X}(F) e^{2\pi j F n} dF \quad (1.29)$$

La fonction complexe $\mathcal{X}(F)$ peut aussi s'exprimer sous la forme

$$\mathcal{X}(F) = \|\mathcal{X}(F)\| e^{j\phi(F)} \quad (1.30)$$

dont le terme d'amplitude est appelé *spectre d'amplitude* de $x[n]$.

Exemple. *Impulsion de DIRAC discrète décalée.*

Considérons le signal

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} = \delta[n-1] \quad (1.31)$$

$$\mathcal{X}(F) = e^{2\pi j F} \quad (1.32)$$

Énergie

Tout comme dans le cas d'une fonction continue, l'énergie du signal est conservée par rapport à sa transformée de FOURIER.

Définition 3 *L'énergie totale du signal vaut*

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|x[n]\|^2 \quad (1.33)$$

Proposition 4 *L'égalité de PARSEVAL s'exprime sous la forme*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|x[n]\|^2 = \int_0^1 \|\mathcal{X}(F)\|^2 dF \quad (1.34)$$

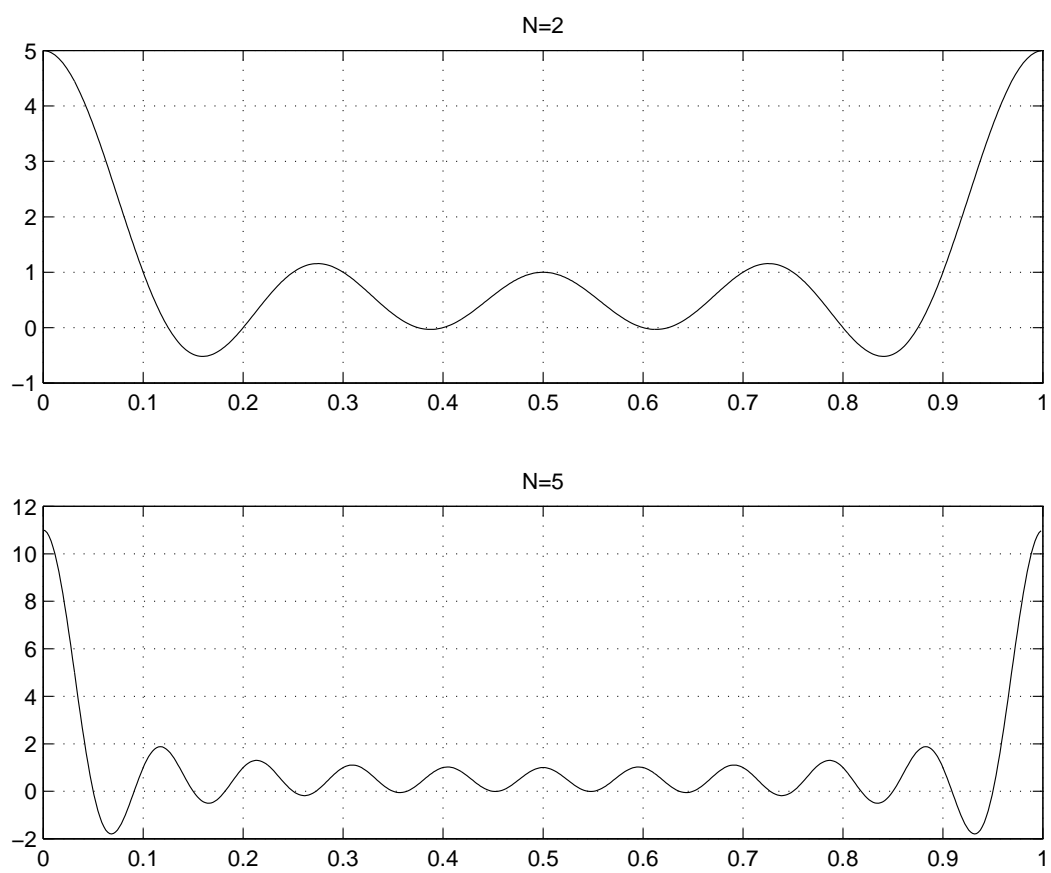


FIG. 1.1 – Transformées de FOURIER d'un signal rectangulaire ($N = 2$ et $N = 5$).

Séquence périodique

Le cas des séquences périodiques est particulier car cette périodicité résulte généralement d'une opération d'échantillonnage ; il s'agit alors d'une périodicité fictive.

Définition 5 Une séquence est périodique s'il existe une valeur entière N telle que

$$x[n] = x[n + N] \quad (1.35)$$

pour toute valeur n .

1.2.3 Transformée de FOURIER discrète

Le calcul de la transformée en temps discret à partir des échantillons de la séquence aboutit à une fonction continue peu commode pour des traitements numériques. Dès lors, on procède à l'échantillonnage de la transformée. Son intérêt réside dans le fait que son calcul se limite à un nombre fini d'échantillons tant dans le domaine temporel que dans le domaine transformé.

Définition 6 [Transformée de FOURIER discrète (DFT)]

$$\mathcal{X}(F_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi j F_k n}, \quad F_k = \frac{k}{N}, \quad k \in \{0, \dots, N-1\} \quad (1.36)$$

L'échantillonnage de la fonction dans le domaine spectral introduit une reproduction de la séquence échantillonnée dans le domaine temporel ; la période fondamentale est N . Ce choix est commun mais il n'est pas obligatoire : on aurait pu choisir une période d'échantillonnage différente à N pour échantillonner la transformée de FOURIER. L'analyse des propriétés de la DFT montre des similitudes avec celles de la dtFT, à une exception près : les calculs se font *modulo* N .

Proposition 7 [Égalité de PARSEVAL]

$$\sum_{n=0}^{N-1} \|x[n]\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathcal{X}(F_k)\|^2, \quad F_k = \frac{k}{N} \quad (1.37)$$

Comme le signal périodique a une énergie infinie, on utilisera plutôt la notion de puissance moyenne de la séquence définie par

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|x[n]\|^2 \quad (1.38)$$

soit encore

$$P = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathcal{X}(F_k)\|^2, \quad F_k = \frac{k}{N} \quad (1.39)$$

1.2.4 Observation spectrale

L'estimation spectrale s'articule sur la notion de transformée de FOURIER. Dès lors, la compréhension de ses propriétés est essentielle. Pour toute transformée de FOURIER, on distingue les deux critères de qualité suivants : *précision sur la position* des raies et *résolution*.

Précision

Pour illustrer l'utilisation de la transformée de FOURIER discrète dans l'observation de spectres de signaux, considérons la suite $x[n]$ obtenue par échantillonnage de l'exponentielle complexe $e^{2\pi j F_0 t}$ à la cadence $F_s = 1/T_s$ (cet exemple est tiré de [5]). En posant $f_0 = F_0/F_s < 1$, on a $x[n] = e^{2\pi j f_0 n}$. Le fait de réduire la durée d'observation à un intervalle N fait apparaître des ondulations dans la transformée de FOURIER à temps discret du signal. Ce phénomène est illustré à la figure 1.2 pour $N = 32$ et $f_0 = \frac{7}{32}$.

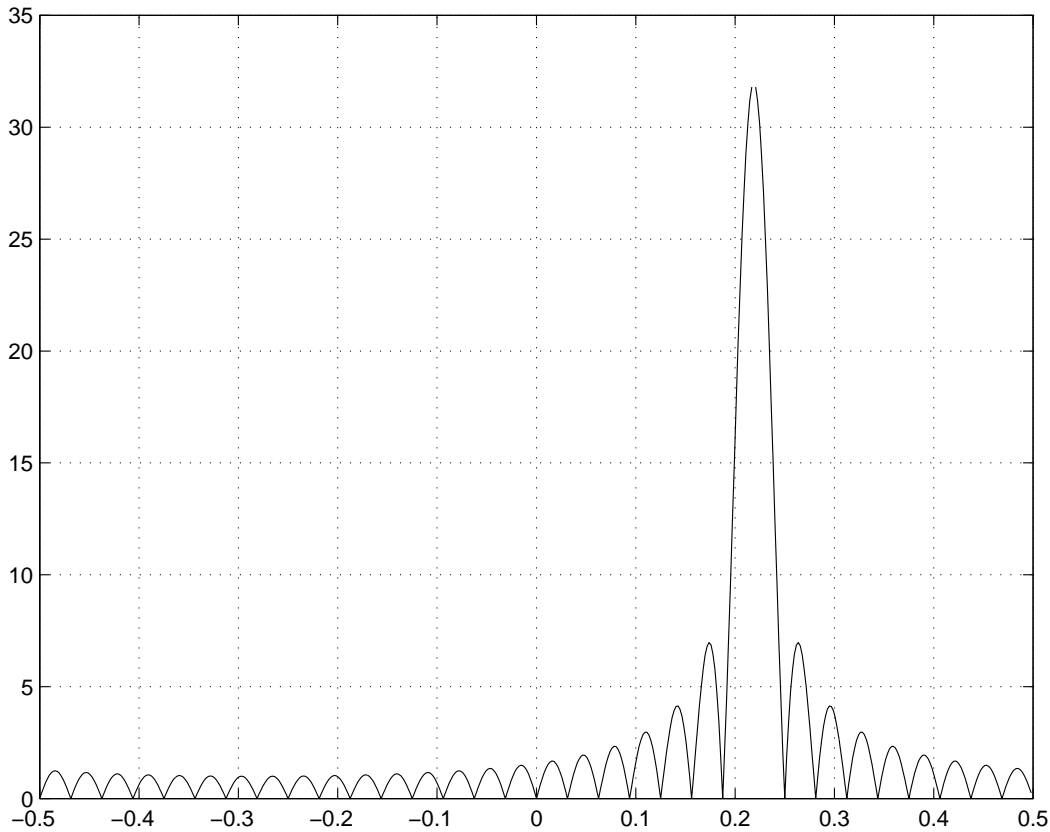


FIG. 1.2 – Transformée de FOURIER à temps discret de l'exponentielle complexe $f_0 = \frac{7}{32}$ avec $N = 32$.

Comme la transformée de FOURIER discrète correspond à l'échantillonnage à la transformée à temps discret aux points de fréquence k/N , elle est en général constituée de valeurs différentes de 0, sauf si f_0 est exactement un multiple de $1/N$. Ces deux situations sont représentées respectivement à la figure 1.3 et 1.4.

Comme on peut le voir à la figure 1.4, une exponentielle dont la fréquence n'est pas un multiple de $\frac{1}{N}$ apparaît sous la forme de plusieurs raies parmi lesquelles la plus proche est celle dont l'amplitude est maximale.

Résolution en fréquence

La *précision* ne doit pas être confondue avec la *résolution* qui est le pouvoir de distinguer deux fréquences voisines dans un signal. Il est commode de définir la résolution par l'écart minimum en fréquence qu'il faut mettre entre deux sinusoides d'amplitudes différentes pour observer sur le spectre de leur somme un creux de plus de 3 [dB] entre les deux maxima.

Comme on l'a vu, le fait d'avoir limité le nombre de valeurs traitées à N conduit à l'apparition de lobes dans le spectre d'une sinusoïde. Le lobe principal a une largeur égale à $2/N$. Il s'ensuit

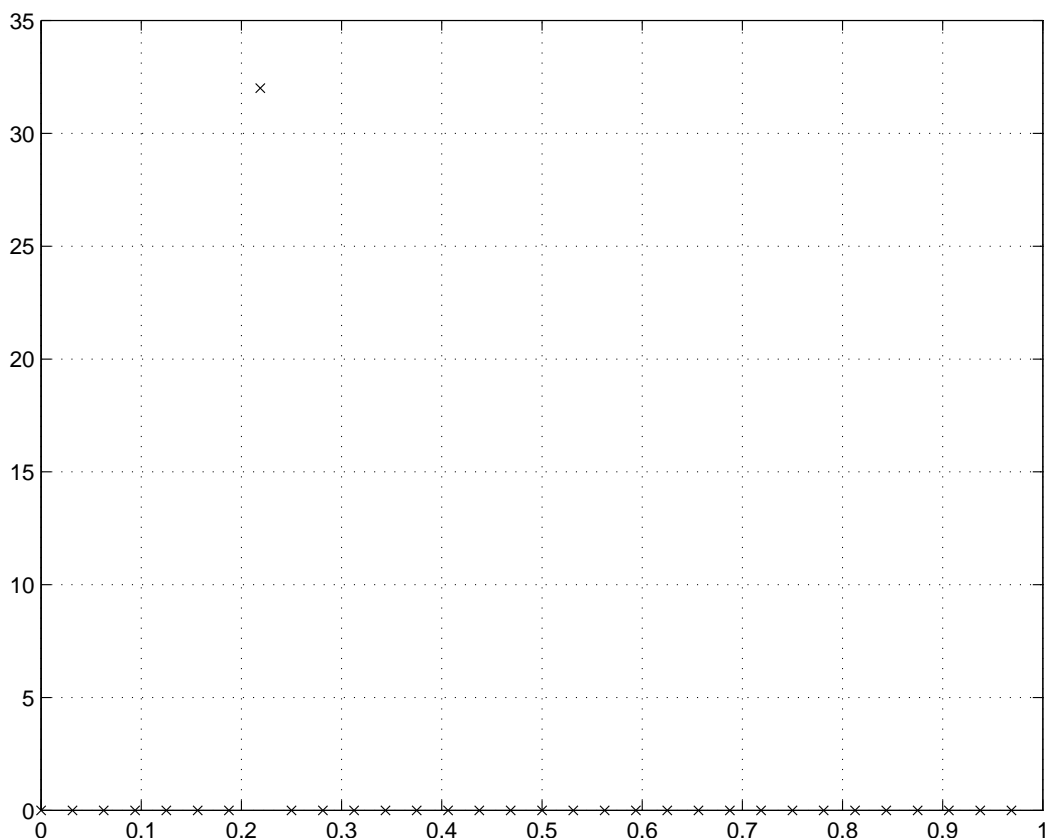


FIG. 1.3 – Transformée de FOURIER discrète de l'exponentielle complexe $f_0 = \frac{7}{32}$ avec $N = 32$.

que, si $x[n]$ contient deux sinusôides dont les fréquences sont séparées de moins de $1/N$, les lobes principaux de chacune d'elles seront si proches qu'il sera difficile de les distinguer avec certitude. Et ceci est d'autant plus vrai que les deux amplitudes sont très différentes. Ainsi, si $f_s = 1/T_s$ désigne la fréquence d'échantillonnage, la résolution R exprimée en $[Hz]$ est de l'ordre de grandeur de f_s/N qui est précisément l'inverse du temps total d'analyse, à savoir $T = NT_s$.

Proposition 8 *La résolution en fréquence est de l'ordre de grandeur de l'inverse du temps total d'analyse.*

Le produit $R \times T$ joue en quelque sorte le rôle de facteur de mérite dans l'utilisation de la transformée de FOURIER à temps discret pour la recherche de fréquences. Typiquement, si on choisit R et T tels que le produit $R \times T \geq 3$, les fréquences seront faciles à séparer.

Spectre à court terme

Comme l'analyse en fréquence classique est une opération qui couvre la totalité de l'axe des fréquences, cette opération effectue une moyenne sur l'axe des temps. Cet effet moyennneur peut aller jusqu'à occulter les phénomènes à observer. Cela ne signifie pas que l'information soit détruite. La transformée de FOURIER est en effet bijective sous les conditions d'existence énoncées précédemment.

Prenons l'exemple d'une onde continue $x(t)$ constituée de deux portions successives de fréquences f_1 et f_2 (cf. figure 1.6).

Sa transformée de FOURIER contient l'information concernant l'ordre dans lequel apparaissent les sinusôides. Toutefois cette information n'est pas explicite, même si elle se trouve dans l'information

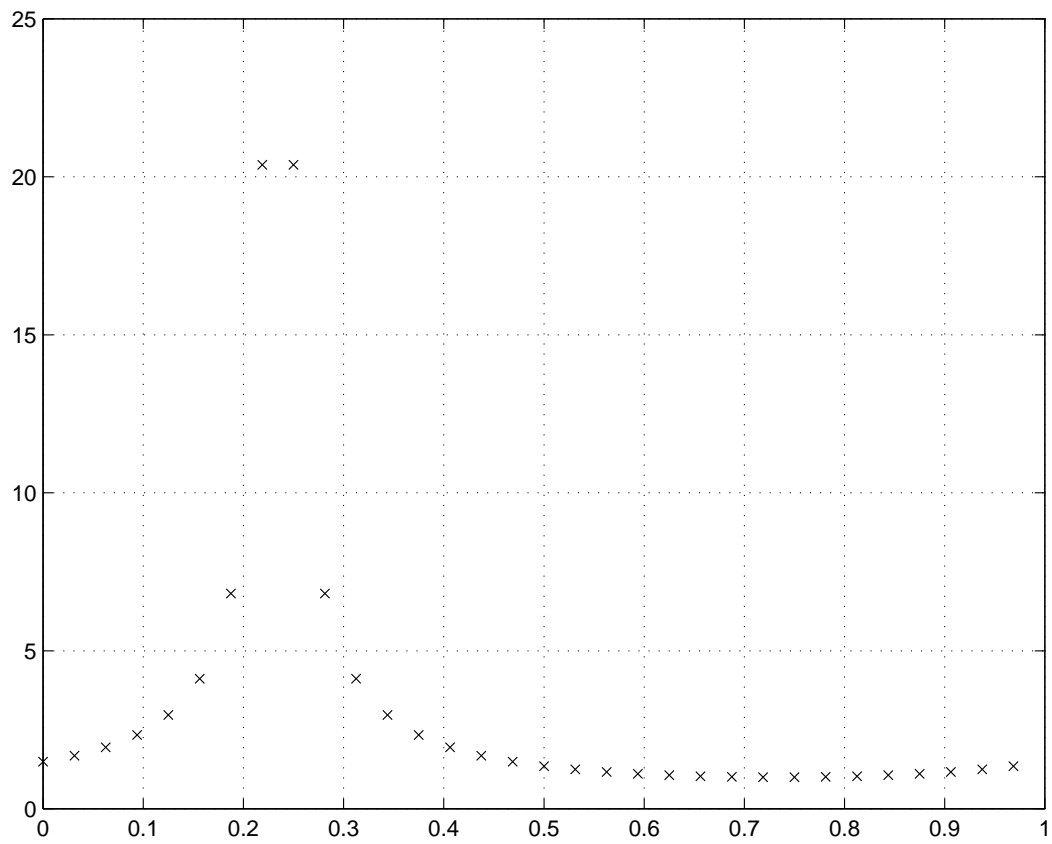


FIG. 1.4 – Transformée de FOURIER discrète de l'exponentielle complexe $f_0 = \frac{7.5}{32}$ avec $N = 32$.

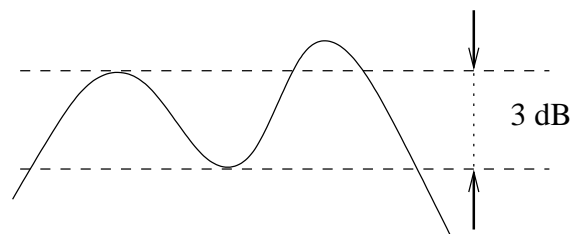


FIG. 1.5 – Résolution en fréquence.

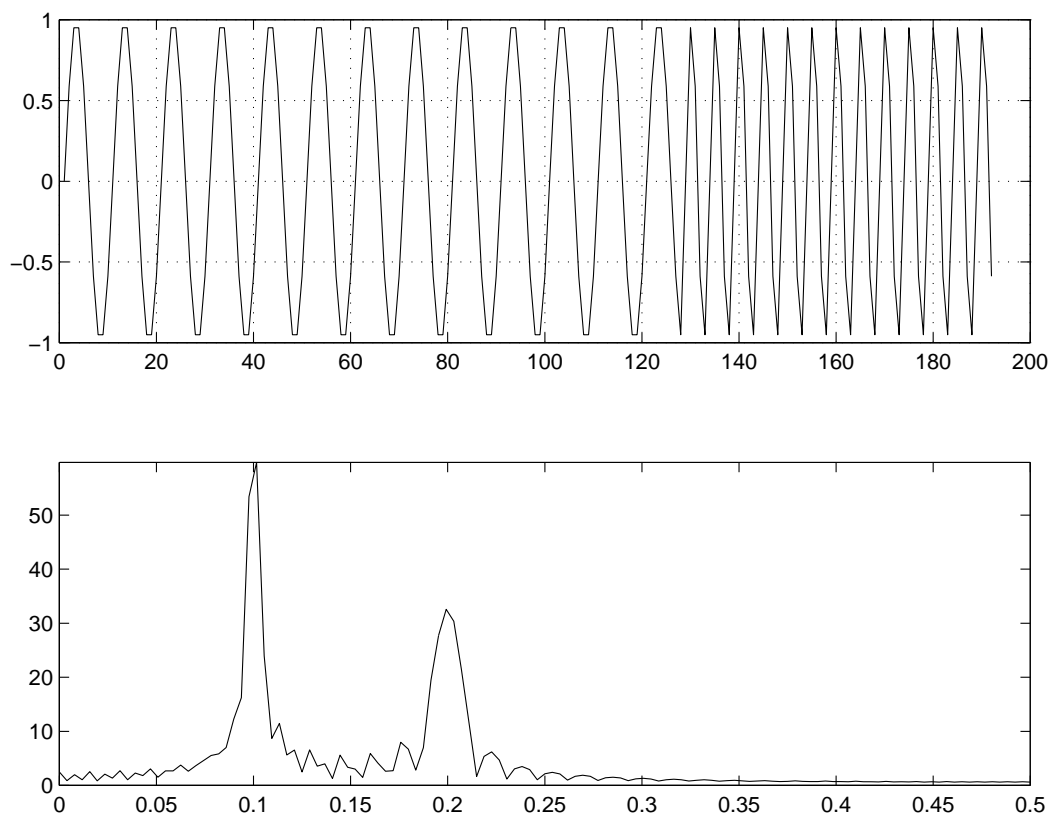


FIG. 1.6 – Deux portions de sinusôides et le spectre correspondant (d’après [5]).

de phase. Par conséquent, l’observation du seul module nous fait échapper l’apparition de f_1 avant f_2 .

Par contre, si on découpe le segment de données en N_{si} sous-intervalles consécutifs pour lesquels on calcule la transformée de FOURIER, le spectre montre que temporellement la fréquence 0,1 apparaît avant la fréquence 0,2. La figure 1.7 montre les transformées des sous-intervalles successifs.

En posant N_i le nombre de points dans un intervalle, on peut faire les remarques suivantes :

- la transformée de FOURIER effectuée sur une moyenne sur N_i valeurs : prendre une grande valeur provoque un fort lissage des fluctuations temporelles du signal. Cela implique que les transitions sont moins bien localisées. L’aptitude à séparer deux événements temporels est de l’ordre de N_i ;
- par contre, dans les mêmes conditions, comme chaque transformée de FOURIER discrète dispose de plus de points de calcul, la largeur des lobes (de l’ordre de $1/N_i$) diminue et les pics de fréquence apparaissent plus nettement.

On peut résumer ces remarques en formulant que, lors de l’utilisation de la transformée de FOURIER discrète à court terme, l’amélioration de la résolution temporelle détériore la résolution fréquentielle.

1.2.5 Spectre d’une séquence aléatoire

L’analyse d’un signal déterministe a permis d’introduire les expressions de transformée de FOURIER à temps discret et de transformée de FOURIER discrète.

L’analyse de signaux aléatoires s’en inspire. Les trajectoires d’un processus aléatoire (cf. figure 1.8), bien qu’étant toutes imprévisibles, possèdent des caractéristiques communes. La moyenne et la fonction d’autocovariance sont deux moyens de caractériser ce comportement.

La condition de module sommable (cf. relation 1.23) n’est pas respectée pour une séquence stationnaire au sens large. En effet, l’énergie d’une telle séquence est infinie. Par contre, sa puissance est

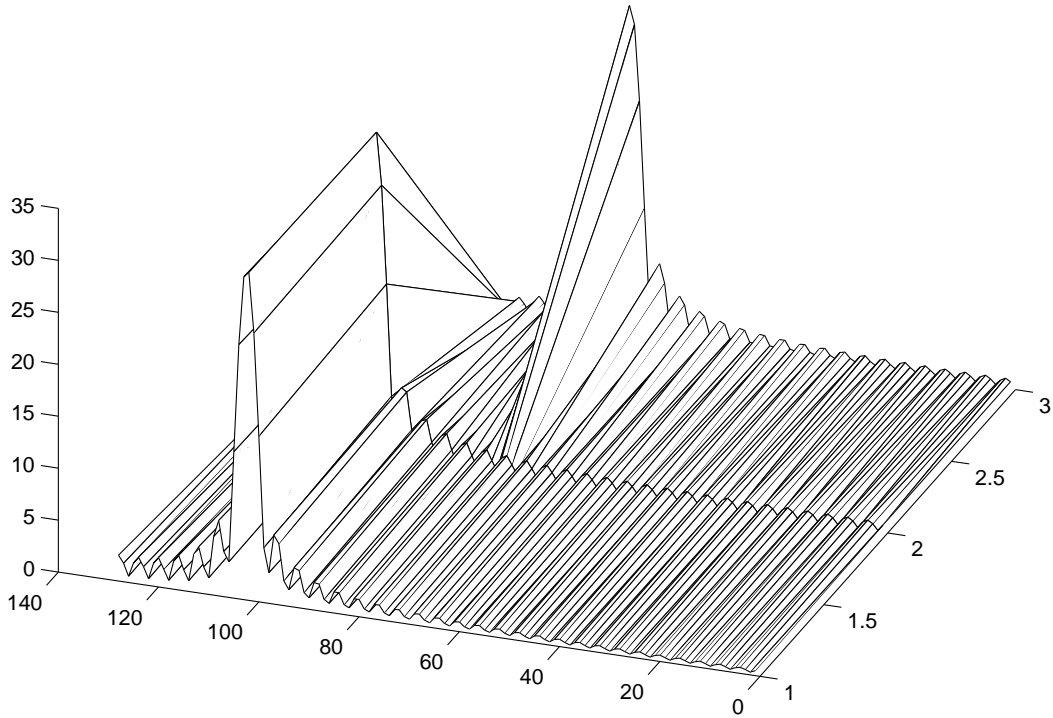


FIG. 1.7 – Deux portions de sinusôides et le spectre correspondant dans une fenêtre d’analyse glissante (d’après [5]).

finie, tout comme dans le cas de signaux périodiques, ce qui va nous amener à déterminer sa densité spectrale de puissance.

1.3 Énoncé du problème de l’estimation

Soit une série de N échantillons $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$ obtenus par échantillonnage d’un processus stochastique. Nous supposons que cette séquence est stationnaire et ergodique. Il faut estimer déterminer certains paramètres relatifs à cette séquence telle que la moyenne μ_X , la covariance $C_{XX}(k)$ ou la densité spectrale de puissance $\gamma_X(F)$. Ces paramètres, moyennes d’ensemble, sont des paramètres déterministes. Si l’on disposait d’une réalisation s’étendant sur tout l’axe temporel, il serait aisé de les calculer en vertu de l’hypothèse d’ergodisme. En pratique, la durée d’observation est finie ; on dispose par exemple de $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$. C’est la durée d’observation qui pose problème, l’absence d’ergodisme ne garantit plus l’égalité entre la moyenne ensembliste et la moyenne temporelle.

1.3.1 Estimateur

Soit à estimer le paramètre α ; *cette quantité est non aléatoire.*

À partir des échantillons $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$, on calcule une certaine estimation notée $\hat{\alpha}$. Cette estimation est donc une fonction A des échantillons

$$\hat{\alpha} = A(x[0], x[1], \dots, x[N-1]) \quad (1.40)$$

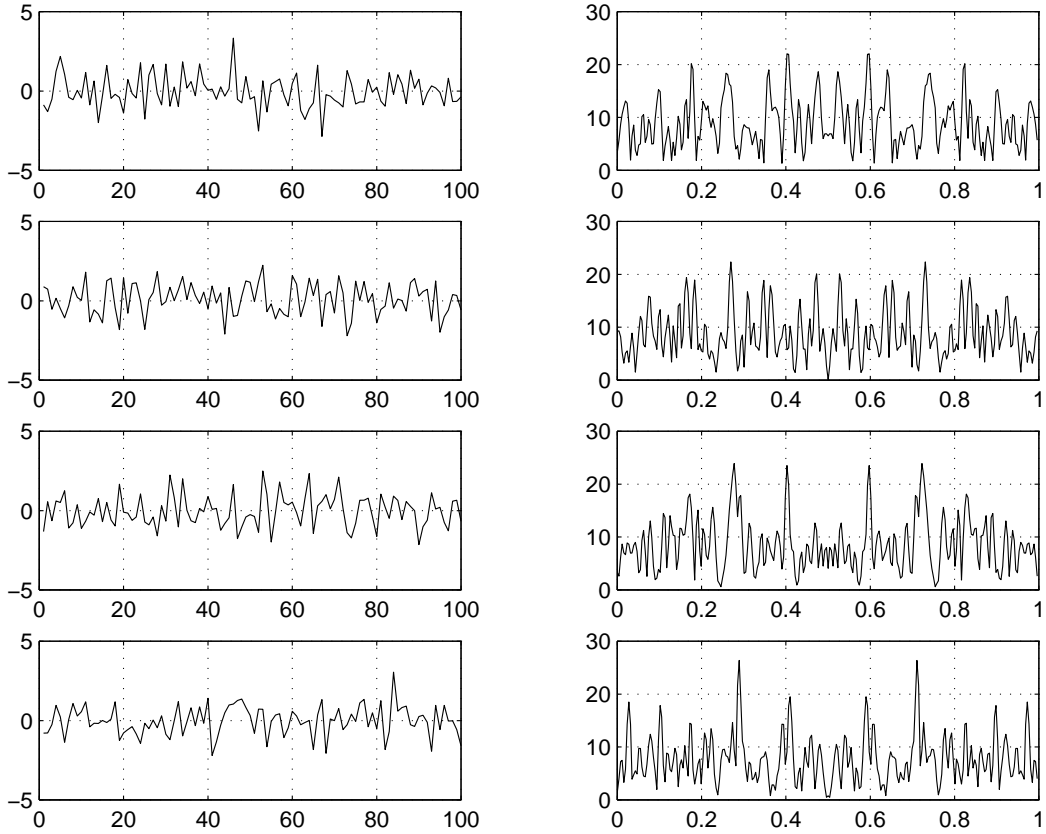


FIG. 1.8 – Une série de trajectoires et leur transformée de FOURIER à temps discret.

La fonction A est appelée *estimateur* de α ; $\hat{\alpha}$ est l'*estimation*.

Contrairement à α , l'estimation $\hat{\alpha}$ est une variable aléatoire puisqu'elle fait intervenir les échantillons d'une séquence aléatoire. À ce titre, elle possède une certaine densité de probabilité, une moyenne, une variance, etc.

Ce problème est différent des problèmes rencontrés en statistique car il s'agit d'estimer une fonction et non une série de paramètres.

1.3.2 Propriétés d'un bon estimateur

L'estimation idéale aurait une densité de probabilité $f_{\hat{\alpha}} = \delta(\alpha - \hat{\alpha})$. L'estimateur réel s'en écarte et il y a donc du sens à parler de moyenne et de variance de l'estimateur. En pratique, on lui associe les paramètres de qualité suivants :

- le *biais*. Le biais est défini par

$$b_{\hat{\alpha}} = \mu_{\hat{\alpha}} - \alpha \quad (1.41)$$

Un estimateur de biais nul est dit *non biaisé*.

- la *variance* de l'estimateur, qui est celle de la variable $\hat{\alpha}$, soit

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = E \{ (\hat{\alpha} - \mu_{\hat{\alpha}})^2 \} \quad (1.42)$$

- l'*erreur quadratique moyenne* (*Mean Square Error*). Il s'agit de la quantité

$$MSE_{\hat{\alpha}} = E \{ (\hat{\alpha} - \alpha)^2 \} \quad (1.43)$$

On montre aisément que

$$MSE_{\hat{\alpha}} = b_{\hat{\alpha}}^2 + \sigma_{\hat{\alpha}}^2 \quad (1.44)$$

S'il est souhaitable que l'estimateur soit non biaisé, les moments d'ordre 2 jouent un rôle capital quand il s'agit d'examiner la convergence des estimateurs. En effet, il ne servirait à rien d'avoir un estimateur non biaisé mais avec un écart type élevé. Comme il faut que biais et écart type soient tous deux petits, la meilleure mesure reste l'erreur quadratique moyenne.

On parle d'estimateur *consistant* si son erreur quadratique moyenne tend vers 0 lorsque la durée d'observation tend vers l'infini, soit

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} MSE_{\hat{\alpha}} = 0 \quad (1.45)$$

Cette condition, à mettre en parallèle avec l'ergodisme, est essentielle quand il s'agit d'exploiter les données d'échantillons prélevés sur une longue période.

1.3.3 Estimateur à maximum de vraisemblance

Une classe importante d'estimateurs est celle des estimateurs de vraisemblance maximale. Précisons d'emblée que cette technique ne s'applique que pour estimer des paramètres d'une densité de probabilité de forme analytique connue, mais dépendant de ces paramètres. Elle est sans intérêt si cette forme analytique n'est pas connue.

Soient $\{X[0], X[1], \dots, X[N-1]\}$ les variables aléatoires dont on pourra faire une observation. La densité de probabilité jointe de ces variables peut dépendre de p paramètres $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$

$$f(X[0], X[1], \dots, X[N-1]; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \quad (1.46)$$

Elle est appelée fonction de vraisemblance de ces paramètres lorsqu'on y insère les valeurs observées $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$.

L'estimateur à maximum de vraisemblance des paramètres $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ consiste à calculer les valeurs $\{\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p\}$ qui maximisent la fonction de vraisemblance. On obtient donc les estimations en cherchant la solution du système de p équations à p inconnues

$$\hat{\alpha}_i = \alpha_i \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = 0 \text{ pour } i = 1, 2, p \quad (1.47)$$

sous réserve de dérivabilité et d'unicité du maximum.

Intervalle de confiance

Cette notion est liée à la technique de l'estimation à maximum de vraisemblance. Cette technique conduit à une formule analytique bien déterminée, du type

$$\hat{\alpha} = S(x[0], x[1], \dots, x[N-1]) \quad (1.48)$$

Supposons un instant que la densité de probabilité de la variable aléatoire $\hat{\alpha}$ soit connue. Alors, étant donné un nombre ε ($0 < \varepsilon < 1$), il est possible de calculer le plus petit intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ tel que

$$p(\alpha_1 < \hat{\alpha} - \alpha < \alpha_2) = 1 - \varepsilon \quad (1.49)$$

que l'on peut encore écrire

$$p(\hat{\alpha} - \alpha_2 < \alpha < \hat{\alpha} - \alpha_1) = 1 - \varepsilon \quad (1.50)$$

Bien que ce soit $\hat{\alpha}$ qui est la variable aléatoire et que α soit une variable certaine, mais inconnue, on a tendance à interpréter cette relation comme la probabilité que α appartienne à l'intervalle $[\hat{\alpha} - \alpha_2, \hat{\alpha} - \alpha_1]$.

Après observation, on aura obtenu une certaine valeur (réalisation) $\hat{\alpha}_0$ de $\hat{\alpha}$. Le plus petit intervalle $[\hat{\alpha}_0 - \alpha_2, \hat{\alpha}_0 - \alpha_1]$ tel que

$$p(\hat{\alpha}_0 - \alpha_2 < \alpha < \hat{\alpha}_0 - \alpha_1) = 1 - \varepsilon \quad (1.51)$$

ce qui revient à

$$\int_{\hat{\alpha}_0 - \alpha_2}^{\hat{\alpha}_0 - \alpha_1} F_{\hat{\alpha}}(\hat{\alpha}) d\hat{\alpha} = 1 - \varepsilon \quad (1.52)$$

est appelé *intervalle de confiance*. Cet intervalle est interprété comme celui dans lequel on risque de trouver la valeur vraie $\hat{\alpha}$ avec une probabilité $1 - \varepsilon$; cependant, une telle interprétation n'étant pas correcte, on utilise le vocable *confiance* pour la quantité $1 - \varepsilon$. On parle ainsi d'intervalle de confiance à 90% ou à 99%.

1.3.4 Un exemple : estimation de la moyenne

Supposons que, à propos d'une séquence aléatoire $x[n]$, on ne sache rien d'autre qu'elle est stationnaire et ergodique. On dispose d'un enregistrement $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$ de durée N , et l'on voudrait estimer la moyenne μ_x . La moyenne arithmétique des échantillons

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (1.53)$$

semble être un estimateur raisonnable.

Biais de $\hat{\mu}_x$?

En prenant l'espérance mathématique des deux membres de cette équation, on a

$$E\{\hat{\mu}_x\} = \mu_x \quad (1.54)$$

et l'on voit que cet estimateur est non biaisé.

Variance de $\hat{\mu}_x$?

Essayons à présent d'en déterminer la variance. Soustrayant membre à membre les deux équations précédentes, il vient

$$\hat{\mu}_x - E\{\hat{\mu}_x\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \mu_x) \quad (1.55)$$

et ensuite

$$\sigma_{\hat{\mu}_x}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} E\{(x[n] - \mu_x)(x[n'] - \mu_x)\} \quad (1.56)$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} C_{xx}[n - n'] \quad (1.57)$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} (N - |i|) C_{xx}[i] \quad (1.58)$$

Cette dernière expression s'obtient en observant que, dans la double somme 1.57, la différence $n - n'$ prend N fois la valeur 0, $N - 1$ fois les valeurs ± 1 , etc.

Cette expression met en évidence un problème courant dans le domaine de l'estimation. Alors qu'on tente ici d'estimer un moment du premier ordre, il faudrait connaître les moments du deuxième ordre pour déterminer la précision de l'estimateur : plus généralement, la précision de l'estimateur des moments d'un ordre déterminé dépend des moments d'un ordre supérieur. Ceux-ci sont logiquement inconnus, et il faudra les estimer eux-mêmes pour avoir une idée de la précision de l'estimateur.

Revenons au cas présent. La double somme 1.57 comprend N^2 termes et, d'une manière générale, il se pourrait que la variance de l'estimateur ne décroisse pas lorsque la durée N de l'enregistrement augmente. Cependant, si la fonction de covariance $C_{xx}[i]$ décroît avec i et, plus précisément, si $\lim_{i \rightarrow +\infty} C_{xx}[i] = 0$, la simple somme apparaissant dans l'équation 1.58 croît proportionnellement à N lorsque $N \rightarrow +\infty$. Dans ce cas, la variance de l'estimateur de $\hat{\mu}_x$ décroît comme $\frac{1}{N}$ et l'estimateur est consistant. Ainsi, si l'on savait que $x[n]$ est un bruit blanc d'intensité σ_x^2 , on aurait $\sigma_{\hat{\mu}_x}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$.

On pourrait croire, à tort, que la moyenne arithmétique est le seul estimateur de la moyenne. En fait, dans les cas où l'on ne dispose que d'un faible nombre d'échantillons, il est intéressant de recourir à la médiane. Si pour certaines distributions aléatoires, par exemple la gaussienne, médiane et moyenne sont confondues, il n'empêche qu'en pratique la médiane est parfois préférée à la moyenne arithmétique.

1.4 Estimation spectrale

1.4.1 Introduction

Dans le cas d'une séquence aléatoire, l'estimation spectrale consiste à estimer la densité spectrale de puissance. Cette estimation ne pourra s'appuyer que sur les valeurs observées qui résultent de la réalisation de la séquence aléatoire. On peut montrer que, moyennant certaines hypothèses, *l'estimation spectrale s'apparente à l'estimation de la transformée de FOURIER de la séquence observée*.

Pour le démontrer, nous partons d'un signal $x(t)$ déterministe, à énergie finie, c'est-à-dire tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty \quad (1.59)$$

Cette hypothèse est légitime en pratique car les signaux observés proviennent de processus physiques réels et limités dans le temps. On définit alors une *pseudo fonction d'autocorrélation* par

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (1.60)$$

dont l'expression est calquée sur l'expression correspondante pour un processus stochastique.

À supposer que le signal ait des caractéristiques stationnaires, on définit également une densité spectrale de puissance par

$$\gamma_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (1.61)$$

Si l'on considère la transformée de FOURIER du signal $x(t)$

$$\mathcal{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \quad (1.62)$$

on peut réécrire l'expression de la densité spectrale en introduisant $\mathcal{X}(f)$

$$\gamma_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (1.63)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau) dt \right) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (1.64)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \right) dt \quad (1.65)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\mathcal{X}(f) e^{2\pi j f t} \right) dt \quad (1.66)$$

$$= \mathcal{X}(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{2\pi j f t} dt \quad (1.67)$$

$$= \mathcal{X}(f) \mathcal{X}^*(f) \quad (1.68)$$

$$= \|\mathcal{X}(f)\|^2 \quad (1.69)$$

Ainsi donc, une estimation simple de la densité spectrale de puissance sur base de l'observation –ce qui présuppose stationnarité et ergodisme– équivaut à l'estimation de la transformée de FOURIER au carré de l'observation. Ce n'est pas la seule façon de faire car on peut tout aussi bien estimer la fonction d'autocorrélation et en prendre la transformée de FOURIER.

Le développement précédent a montré le lien existant entre une densité spectrale et la transformée de FOURIER (au carré) d'un signal. Il a néanmoins complètement occulté la question de l'estimation car il y a plus qu'une marge entre le traitement d'un signal continu et le traitement d'une séquence. En fait, les difficultés de l'estimation résultent en grande partie des échantillonnages et d'une limitation de la durée d'observation. La raison pour laquelle la littérature propose de nombreuses méthodes d'estimation provient des choix qui sont faits pour obtenir une estimation ayant certaines propriétés. C'est donc plus une question de choix qu'une question de rigueur ou de fiabilité.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons un estimateur de la fonction d'autocorrélation et, ensuite, divers estimateurs de la densité spectrale de puissance. En tout état de cause, nous considérons une séquence $x[n]$ aléatoire stationnaire et ergodique que, pour la simplicité, nous supposons centrée. Les estimations sont à déduire d'un enregistrement expérimental $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$ de longueur N .

1.4.2 Estimateur biaisé de la séquence d'autocorrélation

L'estimateur biaisé de la séquence d'autocorrélation est défini par

$$\hat{\Gamma}_{XX}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x[n]x^*[n+|k|] \text{ pour } |k| \leq N-1 \quad (1.70)$$

Cette expression nous permet de calculer une estimée de la densité spectrale par transformée de FOURIER

$$\hat{\gamma}_X(F) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{\Gamma}_{XX}[k] e^{-2\pi j F k} \quad (1.71)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x[n]x^*[n+|k|] e^{-2\pi j F k} \quad (1.72)$$

1.4.3 Estimateur simple de la densité spectrale de puissance : le périodigramme

Par calcul, on montre aisément que

$$\hat{\gamma}_X(F) = \frac{1}{N} \left\| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi j F n} \right\|^2 \quad (1.73)$$

qui n'est rien d'autre que la transformée de FOURIER au carré de l'enregistrement, prolongé par des zéros.

Cet estimateur est appelé *périodigramme*. Il est malheureusement biaisé et

$$E \{ \hat{\gamma}_X(F) \} = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left[1 - \frac{|k|}{N} \right] \hat{\Gamma}_{XX}[k] e^{-2\pi j F k} \quad (1.74)$$

Le périodigramme est un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale de puissance : pour une durée d'observation N suffisamment grande, $\hat{\gamma}_X(F)$ fluctue autour de la vraie valeur de $\gamma_X(F)$. Par contre, l'amplitude des fluctuations, qui est donné par la variance de $\hat{\gamma}_X(F)$, ne tend pas vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Plus précisément, on montre que cette variance est de l'ordre de grandeur de la valeur à estimer. La figure 1.9 montre quatre périodigrammes et une certaine densité spectrale théorique. On observe que, malgré l'allongement de la durée d'observation, l'amplitude des fluctuations ne diminue pas.

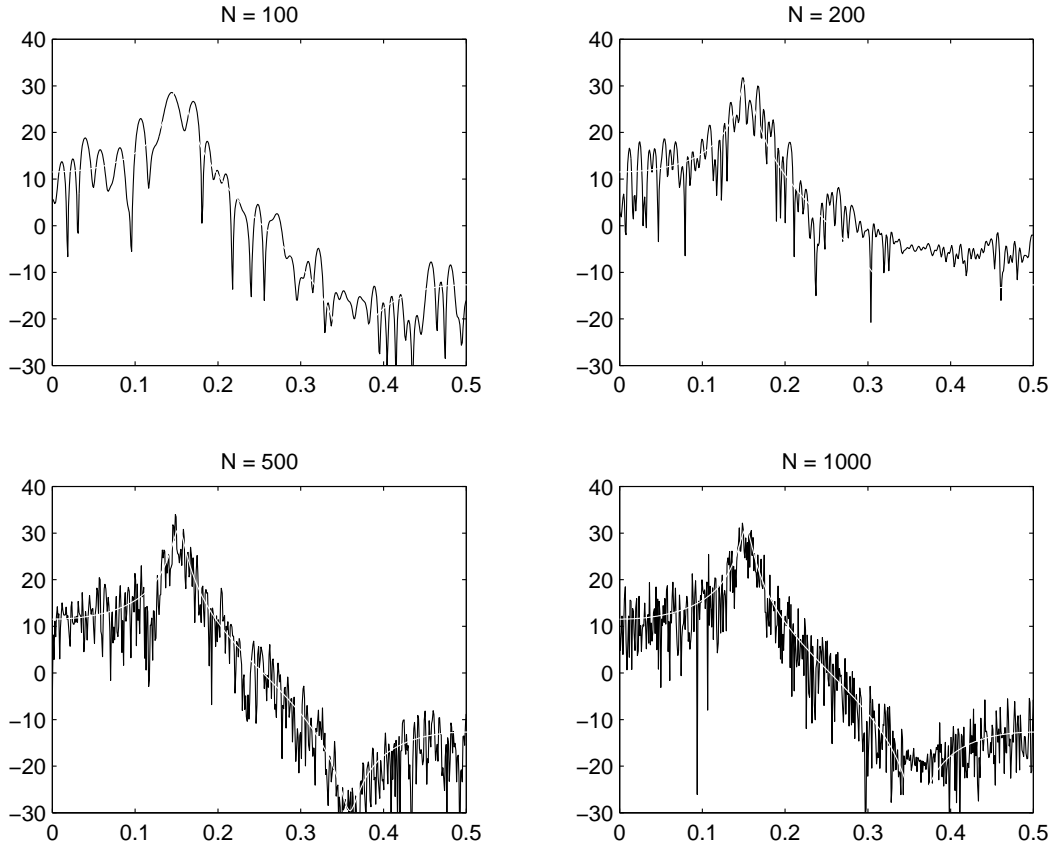


FIG. 1.9 – Fluctuations du périodigramme en fonction de la période totale d'observation N .

En pratique, on applique la transformée discrète. Dès lors,

$$\hat{\gamma}_X(F_k) = \frac{1}{N} \left\| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi jkn/N} \right\|^2 \quad (1.75)$$

1.4.4 Effet de fenêtrage

On peut aussi s'intéresser à la forme de la fonction fenêtrage que l'on applique. En effet,

$$\hat{\gamma}_X(F) = \frac{1}{N} \left\| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi jFn} \right\|^2 \quad (1.76)$$

$$= \frac{1}{N} \left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] w_R[n] e^{-2\pi jFn} \right\|^2 \quad (1.77)$$

où $w_R[n]$ est une fonction de fenêtrage de forme rectangulaire définie par

$$w_R[n] = \begin{cases} 1, & n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.78)$$

L'effet de la fenêtrage n'est pas négligeable car il affecte le spectre du signal observé. Aussi, différentes méthodes d'estimation spectrale tentent-elles d'établir un compromis entre précision spectrale et effet de fenêtrage.

La question de l'estimation spectrale est trop vaste pour que nous l'abordions autrement que par une sensibilisation à la difficulté intrinsèque à estimer un spectre. Pour une étude approfondie, nous renvoyons le lecteur intéressé à des ouvrages spécialisés [5, 6, 15].

Chapitre 2

Représentation des signaux et des systèmes passe-bande

2.1 Introduction

La numérisation des signaux s'opère en plusieurs étapes successives. Dans un premier temps, le signal original est filtré ; il en découle un signal à *spectre limité*¹. Le signal est alors prêt pour une phase de numérisation qui débute par un échantillonnage à une fréquence supérieure à la fréquence de NYQUIST. Ainsi, la transmission d'un signal de parole filtré à 4 [kHz] et numérisé nécessite tout au plus quelques dizaines de kb/s.

Sur une ligne téléphonique, la transmission s'effectue en bande de base. Après tout, la ligne étant physiquement dédiée à un utilisateur, il n'y a aucune raison particulière de partager le canal en modulant le signal. De plus, on a tout intérêt à conserver un signal en bande de base puisque l'atténuation y est la plus faible.

La situation est tout autre dans l'espace. La ressource étant partagée, chaque utilisateur se voit allouer une bande de fréquences spécifique. Pour l'occuper, un mélangeur transpose le signal de la bande de base vers la bande de fréquences dédiée. Après transmission, on ramène le signal en bande de base et on procède à la démodulation.

On voit donc apparaître *deux types de considérations fréquentielles* :

- la *bande de base*. C'est la bande occupée par le signal original.
- la *bande utile*, bande dans laquelle on vient placer le signal initialement en bande de base. On parle alors de système *passe-bande* puisque, du point de vue de l'utilisateur, le système agit par transparence dans la bande utile mais il annule les composantes hors bande.

Cette notion de passe-bande est formalisée par la définition suivante.

Définition 9 [Passe-bande] *Un signal déterministe $g(t)$ est de type passe-bande s'il existe deux valeurs f_0 et W telle que*

$$\forall f \notin [f_0 - \frac{W}{2}, f_0 + \frac{W}{2}], \|\mathcal{G}(f)\| = 0 \quad (2.1)$$

La figure 2.1 représente un signal passe-bande. Il est à remarquer que le spectre d'un signal réel ne doit nullement être symétrique par rapport à la fréquence f_0 . Ainsi, si la modulation d'amplitude conduit à un spectre symétrique autour de la fréquence porteuse, la modulation d'amplitude à bande résiduelle produit un spectre non symétrique.

¹En toute rigueur, un signal à spectre limité est à durée infinie. Mais comme les signaux réels sont à durée finie, il y a une contradiction à définir un signal à spectre limité. On utilise néanmoins cette modélisation.

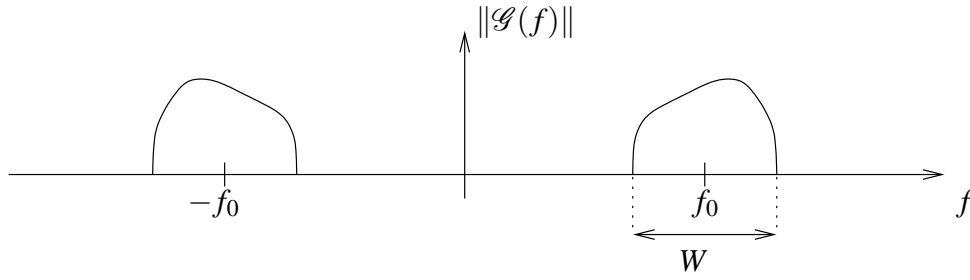


FIG. 2.1 – Spectre d'un signal passe-bande.

La modélisation d'un signal passe-bande peut paraître plus complexe puisque le signal fluctue à une cadence rythmée par la plus haute fréquence contenue dans le signal. Fort heureusement, on peut tirer profit du fait que le signal de départ se situe en bande de base.

N'oublions pas que, comme il s'agit de reconstituer ce signal en bande de base –le signal modulé n'est pas une fin en soi–, on peut s'interroger sur la possibilité de modéliser les signaux et les systèmes à des fréquences nettement inférieures à la fréquence porteuse.

La démodulation d'un signal AM à porteuse par détecteur de crête utilise ce principe. En effet, un choix judicieux des constantes de temps permet de récupérer l'enveloppe du signal. Hormis l'obligation de choisir les constantes de temps en fonction de la borne maximale de la bande de base et en fonction de la fréquence porteuse lors de la synthèse d'un détecteur, il apparaît que le circuit de démodulation travaille dans une plage de fréquences telle que définie par la bande de base ; il n'y a pas de composante haute-fréquence.

Avant d'aborder plus en détail la phase de modélisation, examinons la question de l'échantillonnage des signaux passe-bande.

2.1.1 Échantillonnage des signaux passe-bande

Prenons un signal passe-bande $g(t)$. On montre le théorème d'échantillonnage uniforme suivant pour les signaux passe-bande.

Théorème 10 *Une fonction $g(t)$ à énergie finie et à spectre limité, c'est-à-dire dont la transformée de FOURIER $\mathcal{G}(f)$ est de largeur W , et qui admet une borne supérieure f_u , est entièrement déterminée par ses échantillons $g[nT_s]$, $n \in \{-\infty, +\infty\}$ si la fréquence d'échantillonnage f_s vaut $\frac{2f_u}{k}$, tel que k est le plus grand entier strictement inférieur à $\frac{f_u}{W}$.*

Il est à noter que toutes les fréquences d'échantillonnage ne conviennent pas sauf si elles sont strictement supérieures à $2f_u$.

Démonstration

On sait que le spectre d'un signal échantillonné $g_s(t)$ est périodique centré sur les multiples if_s :

$$g_s(t) \Rightarrow f_s \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(f - if_s) \quad (2.2)$$

Dans notre cas, le signal est de type passe-bande. L'échantillonnage pourrait amener un chevauchement des copies des spectres si l'on n'y prend garde. Prenons une fréquence d'échantillonnage f_s définie par $\frac{2f_u}{k}$. Pour éviter tout repli de spectre, il faut impérativement que $f_s > 2W$. Dès lors, on obtient $\frac{2f_u}{k} > 2W$, ce qui implique $k < \frac{f_u}{W}$. ■

Exemple. Considérons un signal $W = 20 [kHz]$ et $f_u = 105 [kHz]$. Par application du théorème, $k < 5,25$. Autrement dit, la fréquence d'échantillonnage $f_s = 42 [kHz]$ convient. La figure 2.2 représente

le signal échantillonné dans le domaine spectral. On est évidemment loin de la fréquence de NYQUIST qui aurait prévalu s'il ne s'agissait d'un signal passe-bande.

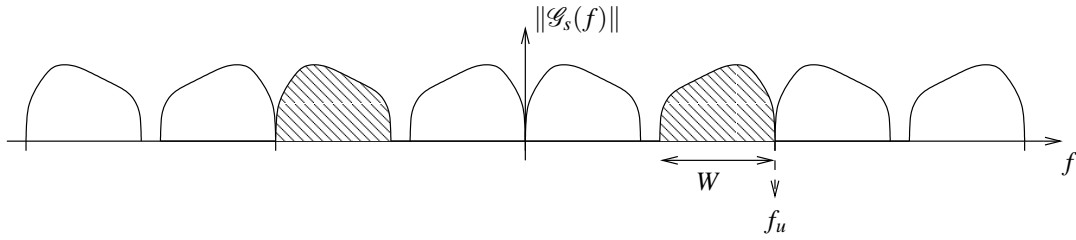


FIG. 2.2 – Signal passe-bande et signal après échantillonnage.

Plusieurs remarques s'imposent :

- S'il est vrai que le théorème garantit que soit préservée la bande de fréquence utile, il ne dit rien quant à la position des copies du spectre. On sait tout au plus que le spectre doit être symétrique puisque le signal échantillonné est réel. Il serait pourtant fort agréable de n'avoir que la partie située à droite ou à gauche de l'origine et de la centrer sur l'origine. On pourrait alors utiliser cette copie pour des opérations de type passe-bas, nettement plus faciles à réaliser. Précisons toutefois que la partie qui aboutirait près de l'origine n'est pas nécessairement symétrique ; le filtrage de la composante à basse fréquence fournira donc un signal complexe.
- Le théorème ne fait nullement intervenir le concept de fréquence porteuse même si la majorité des signaux de type passe-bande sont le résultat d'une phase de modulation.

2.2 Représentation des signaux passe-bande déterministes

Le modèle développé ci-après aboutit à définir des signaux passe-bande complexes et une fréquence de référence pour permettre la mise en correspondance entre un signal passe-bande original et le signal passe-bas de synthèse.

Définition 11 [Passe-bas équivalent] *Considérons un signal passe-bande déterministe $g(t)$. Le signal $g(t)$ peut s'écrire sous la forme de*

$$g(t) = \text{Re} \left(\bar{g}(t) e^{2\pi j f_0 t + j \varphi_0} \right) \quad (2.3)$$

telle que f_0 est une fréquence de référence contenue dans la bande utile du signal². Dans cette égalité, $\bar{g}(t)$ porte le nom de passe-bas équivalent.

Dans un souci de rigueur, il conviendrait plutôt de parler de famille de passe-bas équivalents. À l'évidence, toute fonction $\bar{g}(t) = (g(t) + jz(t))e^{-2\pi j f_0 t - j \varphi_0}$ respecte l'égalité 2.3.

La détermination d'un type de passe-bas équivalent revient donc à choisir une fonction particulière pour $z(t)$. Comme on pourra s'en apercevoir le choix n'est pas unique. Pour compliquer l'affaire, certains auteurs [24] définissent le passe-bas équivalent en introduisant un facteur de normalisation $\sqrt{2}$ dans l'expression 2.3 afin d'éviter l'apparition d'un facteur 2 lors de l'analyse de systèmes linéaires ; on trouve les deux définitions dans la littérature.

² φ_0 est souvent choisi nul par commodité. Cela ne nuit en rien à la généralité des propos.

2.2.1 Signaux modulés

La modulation est un procédé qui, en toute généralité, convertit une paire de signaux modulateurs $m_1(t)$, $m_2(t)$ définis en bande de base, en un signal modulé $s(t)$ de la forme

$$s(t) = \text{Re} \left((m_1(t) + jm_2(t)) e^{2\pi j f_c t + j\varphi_c} \right) \quad (2.4)$$

Par comparaison avec la définition d'un passe-bas équivalent (relation 2.3), le choix suivant s'impose

$$\bar{s}(t) = m_1(t) + jm_2(t) \quad (2.5)$$

La fréquence porteuse joue alors le rôle de fréquence de référence³. Ce passe-bas équivalent n'a pas de réelle signification physique puisqu'il est de nature complexe. C'est néanmoins un signal de synthèse fort commode, comme nous le verrons, pour traiter les signaux passant dans un système linéaire.

Les signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$ sont appelés respectivement *composante en phase* et *composante en quadrature* de $s(t)$, car

$$s(t) = m_1(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - m_2(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (2.6)$$

Dans le cas d'une modulation numérique linéaire, les signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$ représentent une séquence d'impulsions mises en forme. On peut aisément trouver les équivalents passe-bas des principales modulations numériques.

Modulation numérique d'amplitude à 2^n états

Un signal numérique à 2^n états modulé en amplitude (2^n -ASK) est de la forme

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \text{Rect}_{[0,T]}(t - kT) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.7)$$

où A_k est une variable aléatoire pouvant prendre 2^n valeurs différentes. Le passe-bas équivalent est tout simplement

$$\bar{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \text{Rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (2.8)$$

Modulation numérique de phase à 2^n états

De même, sachant qu'un signal numérique à 2^n états modulé en phase (2^n -PSK) est de la forme

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Rect}_{[0,T]}(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \theta_k) \quad (2.9)$$

où θ_k est une variable aléatoire pouvant prendre 2^n valeurs différentes dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Le passe-bas équivalent est

$$\bar{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Rect}_{[0,T]}(t - kT) e^{j\theta_k} \quad (2.10)$$

³Ce choix convient dans bon nombre de cas mais il arrive qu'un autre choix soit plus judicieux ; c'est la facilité de formulation résultante qui guidera le choix final.

En effet, en prenant $\varphi_c = 0$,

$$s(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Rect}_{[0,T]}(t - kT) e^{j\theta_k} e^{2\pi j f_c t} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Rect}_{[0,T]}(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \theta_k) \quad (2.11)$$

2.2.2 Signal analytique

Jusqu'à présent, nous avons étudié les signaux modulés. Néanmoins, le principe de ramener le signal en bande de base s'applique à tous les signaux de type passe-bande. Cela nécessite pourtant quelques précautions si l'on veut éviter des recouvrements de spectre à l'origine.

Prenons un signal $g(t)$ réel et déterministe. Le principe de base consiste à effacer une partie du spectre avant de procéder à un déplacement fréquentiel. L'opération est sans perte d'information si l'on se rappelle que le spectre d'un signal réel est tel que

$$\operatorname{Re}(\mathcal{G}(-f)) = \operatorname{Re}(\mathcal{G}(f)) \quad (2.12)$$

$$\operatorname{Im}(\mathcal{G}(-f)) = -\operatorname{Im}(\mathcal{G}(f)) \quad (2.13)$$

L'exploitation de la symétrie permet de ne considérer que les fréquences positives durant les calculs, à condition bien sûr de reconstituer les fréquences négatives pour rétablir la nature du signal réel en fin de calculs.

Soit donc le filtre $\mathcal{H}(f)$ supprimant les fréquences négatives ; par la même occasion, il amplifie les fréquences positives d'un facteur 2 de manière à conserver le même niveau d'énergie. Ce filtre se caractérise par la transmittance

$$\mathcal{H}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \\ 2 & \text{si } f \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

qui peut également se mettre sous la forme

$$\mathcal{H}(f) = 1 + \operatorname{sgn}(f)$$

Étant donné que la transformée de FOURIER de la fonction sgn est donnée par

$$\operatorname{sgn}(t) \rightleftharpoons \frac{1}{\pi j f}$$

on peut utiliser la propriété de dualité de la transformée de FOURIER pour déduire que

$$\frac{j}{\pi t} \rightleftharpoons \operatorname{sgn}(f)$$

On arrive alors à l'expression de la réponse impulsionnelle du filtre

$$h(t) = \delta(t) + \frac{j}{\pi t}$$

Définition 12 [Signal analytique] La réponse d'un tel filtre à un signal d'entrée $g(t)$ est appelée signal analytique. Elle est notée $g_a(t)$ et vaut

$$g_a(t) = g(t) \otimes \left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) \quad (2.15)$$

$$= g(t) + jg(t) \otimes \frac{1}{\pi t} \quad (2.16)$$

On définit ensuite la transformée de HILBERT d'un signal.

Définition 13 [Transformée de HILBERT] Soit un signal $g(t)$. Sa transformée de HILBERT, notée $\tilde{g}(t)$, vaut

$$\tilde{g}(t) = g(t) \otimes \frac{1}{\pi t} \quad (2.17)$$

Par cette définition,

$$g_a(t) = g(t) + j\tilde{g}(t) \quad (2.18)$$

Le signal analytique est donc composé d'une partie réelle, qui n'est autre que le signal original, et d'une partie imaginaire qui en est la transformée de HILBERT. L'apparition d'une composante imaginaire ne doit pas nous étonner car elle résulte de la rupture de symétrie dans le spectre. La norme du signal analytique est appelée *enveloppe* du signal.

Le signal $\tilde{g}(t)$ porte aussi le nom de *signal en quadrature* du signal d'entrée. Cette appellation provient des caractéristiques du filtre $\frac{1}{\pi t}$. En effet, la transmittance de ce filtre vaut $-j\text{sgn}(f)$. Dès lors,

$$\tilde{\mathcal{G}}(f) = -j\text{sgn}(f)\mathcal{G}(f) \quad (2.19)$$

Autrement dit, les fréquences positives et négatives subissent toutes un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$. Par la même occasion, on remarque que la transformée de HILBERT occupe la même bande de fréquence que le signal original.

Propriétés de la transformée de HILBERT

Propriété 14 L'énergie (ou la puissance) d'un signal et celle de sa transformée de HILBERT sont égales.

Démonstration

L'énergie de la transformée de HILBERT d'un signal vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\tilde{g}(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\tilde{\mathcal{G}}(f)\|^2 df \quad (2.20)$$

Or

$$\|\tilde{\mathcal{G}}(f)\|^2 = \|-j\text{sgn}(f)\|^2 \|\mathcal{G}(f)\|^2 \quad (2.21)$$

$$= \|\mathcal{G}(f)\|^2 \quad (2.22)$$

■

Propriété 15 [36, page 96] Un signal est orthogonal à sa transformée de HILBERT. Pour un signal d'énergie,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\tilde{g}(t)dt = 0 \quad (2.23)$$

et pour un signal de puissance

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} g(t)\tilde{g}(t)dt = 0 \quad (2.24)$$

Transformée de HILBERT d'un signal modulé

Calculons tout d'abord la transformée de HILBERT d'un cosinus. Soit $g(t) = \cos(2\pi f_c t)$. Le spectre de signal vaut

$$\mathcal{G}(f) = \frac{\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)}{2} \quad (2.25)$$

d'où, par application de la relation 2.19,

$$\tilde{\mathcal{G}}(f) = \frac{-j\delta(f - f_c) + j\delta(f + f_c)}{2} \quad (2.26)$$

$$= \frac{\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)}{2j} \quad (2.27)$$

qui n'est autre que la transformée de FOURIER d'un sinus. Ainsi,

$$\widetilde{\cos(2\pi f_c t)} = \sin(2\pi f_c t) \quad (2.28)$$

Ce résultat ne doit pas nous étonner car il découle d'un déphasage du cosinus par ajout d'une phase $-\frac{\pi}{2}$. Le même raisonnement conduit aisément au résultat suivant.

Propriété 16 [Transformée de HILBERT d'un signal modulé] Soit un signal $g(t)$ en bande de base,

$$\widetilde{g(t) \cos(2\pi f_c t)} = g(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.29)$$

Représentation passe-bas à partir du signal analytique

Le signal analytique peut être utilisé pour construire un signal passe-bas équivalent. En effet, il suffit de ramener le signal analytique près de l'origine par une translation de son spectre. Un moyen commode consiste à prendre la fréquence de référence f_0 du signal passe-bande pour effectuer le déplacement. Mais ce choix n'est nullement obligatoire.

Définition 17 [Enveloppe complexe du signal] Le signal obtenu par décalage du signal analytique le long de l'axe fréquentiel porte le nom d'enveloppe complexe du signal original. Elle sera notée $e_g(t)$.

Par définition, l'enveloppe complexe et son spectre sont respectivement liés à leur équivalent analytique par les relations

$$e_g(t) = g_a(t) e^{-2\pi j f_0 t} \quad (2.30)$$

$$\mathcal{E}_g(f) = \mathcal{G}_a(f + f_0) \quad (2.31)$$

La démarche adoptée a permis de construire l'enveloppe complexe à partir du signal de départ. Pour se convaincre de l'utilité de l'enveloppe complexe comme passe-bas équivalent, déterminons le lien inverse. Un calcul simple montre que

$$g(t) = \operatorname{Re}(g_a(t)) \quad (2.32)$$

$$= \operatorname{Re}\left(e_g(t) e^{2\pi j f_0 t}\right) \quad (2.33)$$

Il s'agit donc bien d'une forme valide de passe-bas équivalent tel que définie par la relation 2.3.

Décomposition de RICE

Il nous reste maintenant à déterminer des moyens pratiques pour calculer l'enveloppe complexe d'un signal. Pour ce faire, on décompose l'enveloppe complexe en sa partie réelle et sa partie imaginaire

$$e_g(t) = g_I(t) + jg_Q(t) \quad (2.34)$$

Nous avons pris le soin de faire référence au signal g pour des raisons qui apparaîtront bientôt. $g_I(t)$ s'obtient comme suit

$$g_I(t) = \text{Re}(e_g(t)) \quad (2.35)$$

$$= \text{Re}\left(g_a(t)e^{-2\pi j f_0 t}\right) \quad (2.36)$$

$$= g(t) \cos(2\pi f_0 t) + \tilde{g}(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (2.37)$$

De même,

$$g_Q(t) = \text{Im}(e_g(t)) \quad (2.38)$$

$$= \text{Im}\left(g_a(t)e^{-2\pi j f_0 t}\right) \quad (2.39)$$

$$= -g(t) \sin(2\pi f_0 t) + \tilde{g}(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (2.40)$$

Les signaux $g_I(t)$ et $g_Q(t)$ sont appelés *composantes de RICE* ou *composantes en quadrature*. Sur le plan théorique, on peut les calculer très simplement à partir du schéma décrit à la figure 2.3.

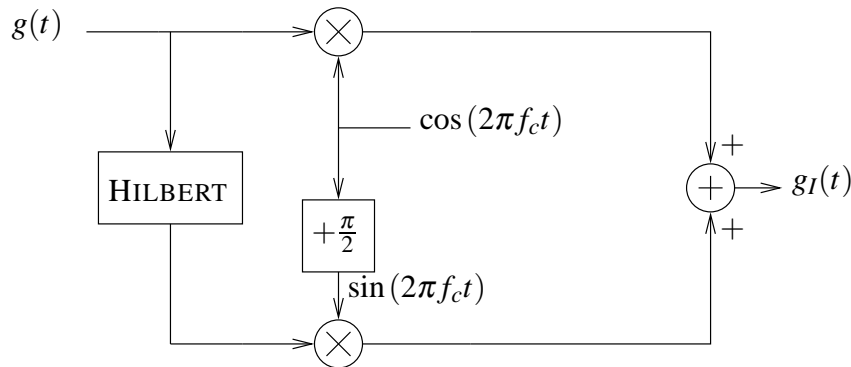


FIG. 2.3 – Schéma de calcul de la composante en phase de RICE.

L'intérêt des composantes de RICE est clair lorsqu'on détermine le signal de départ à partir de l'enveloppe complexe. En effet,

$$g(t) = \text{Re}(g_a(t)) \quad (2.41)$$

$$= \text{Re}\left(e_g(t)e^{2\pi j f_0 t}\right) \quad (2.42)$$

$$= \text{Re}\left((g_I(t) + jg_Q(t))e^{2\pi j f_0 t}\right) \quad (2.43)$$

$$= g_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (2.44)$$

Cette dernière expression traduit un résultat important : tout signal passe-bande peut s'exprimer comme la somme de deux signaux confinés à l'intérieur de l'intervalle de fréquences $[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}]$ et modulés en quadrature.

La figure 2.4 montre comment reconstituer le signal original à partir de ses composantes de RICE.

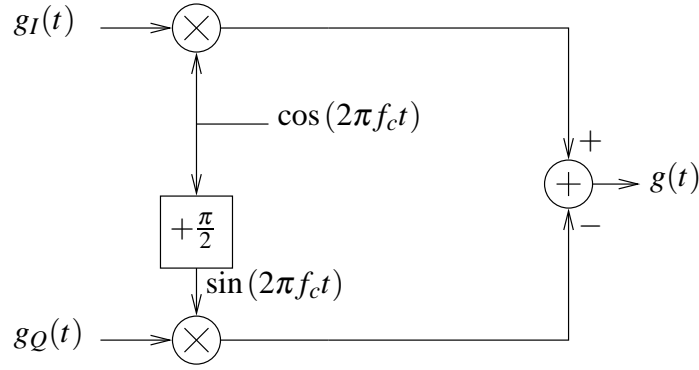


FIG. 2.4 – Schéma de reconstitution d'un signal à partir de ses composantes de RICE.

L'enveloppe complexe peut aussi s'écrire sous la forme d'une amplitude instantanée et d'une phase instantanée

$$e_g(t) = a_g(t)e^{j\phi_g(t)} \quad (2.45)$$

On a alors les trois relations

$$a_g(t) = \sqrt{g_I^2(t) + g_Q^2(t)} \quad (2.46)$$

$$\phi_g(t) = \tan^{-1} \frac{g_Q(t)}{g_I(t)} \quad (2.47)$$

$$g(t) = a_g(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi_g(t)) \quad (2.48)$$

Dès lors, on trouve un second résultat important : tout signal passe-bande peut s'exprimer sous la forme d'un signal modulé en phase et en amplitude. Le passage de $g(t)$ dans un détecteur de crête produit $a_g(t)$. D'autre part, moyennant la suppression de la modulation résiduelle, un détecteur de phase ou un discriminateur de fréquences sera en mesure de déterminer l'allure de la modulation angulaire.

En pratique

Les expressions 2.37 et 2.40 de calcul des composantes de RICE, pour rigoureuses qu'elles soient, ne sont guère pratiques car elles exigent la détermination préalable de la transformée de HILBERT. Un moyen très facile consiste à procéder à l'instar d'un démodulateur d'amplitude : on multiplie le signal original par $2 \cos(2\pi f_0 t)$ (ou $2 \sin(2\pi f_0 t)$) et on applique un filtre passe-bas, comme illustré par le schéma 2.5.

En effet,

$$g(t) \times 2 \cos(2\pi f_0 t) = 2 [g_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_0 t)] \cos(2\pi f_0 t) \quad (2.49)$$

$$= 2 [g_I(t) \cos^2(2\pi f_0 t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t)] \quad (2.50)$$

$$= g_I(t) + g_I(t) \cos(4\pi f_0 t) - g_Q(t) \sin(4\pi f_0 t) \quad (2.51)$$

Un filtrage passe-bas fournit donc bien $g_I(t)$.

Les composantes de RICE occupent une bande de fréquences qui n'est pas fondamentalement plus large que celle de l'enveloppe complexe. Pour le montrer, calculons le spectre de $g_I(t)$. Comme $g_I(t) = \frac{1}{2} (e_g(t) + e_g^*(t))$,

$$\mathcal{G}_I(f) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_g(f) + \mathcal{E}_g^*(-f)) \quad (2.52)$$

Dès lors, si la transformée $\mathcal{E}_g(f)$ est nulle $\forall f : |f| > f_{sup}$, le spectre de la composante en phase est confiné dans l'intervalle de fréquences $[-f_{sup}, +f_{sup}]$.

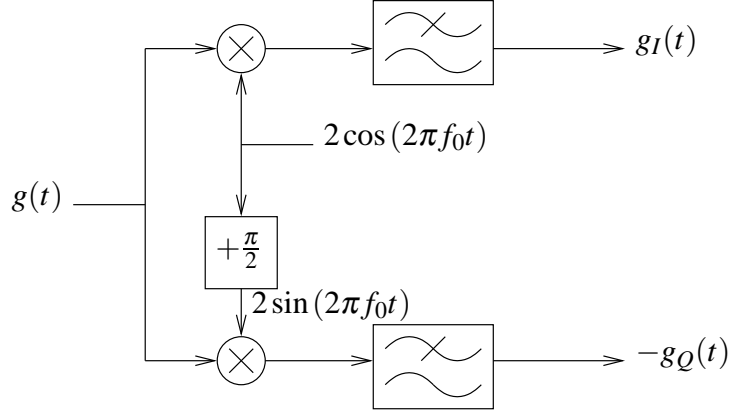


FIG. 2.5 – Schéma de calcul pratique des composantes de RICE.

2.3 Systèmes linéaires, invariants en translation et passe-bande

Tout comme pour les signaux passe-bande, la réponse impulsionnelle d'un système linéaire, invariant en translation et passe-bande peut s'exprimer au départ de l'enveloppe complexe de la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \text{Re} \left(e_h(t) e^{2\pi j f_0 t} \right) \quad (2.53)$$

Filtrer un signal réel $g(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ peut se faire au choix :

- par convolution $g(t) \otimes h(t)$;
- en filtrant le signal analytique $g_a(t)$ par un système ayant $h_a(t)$ pour réponse impulsionnelle ;
ou encore
- en filtrant l'enveloppe complexe $e_g(t)$ par $e_h(t)$.

Détaillons cette dernière méthode. Le signal filtré vaut

$$y(t) = g(t) \otimes h(t) \quad (2.54)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) g(t - \lambda) d\lambda \quad (2.55)$$

Comme on peut écrire

$$g(t) = \frac{1}{2} \left(e_g(t) e^{2\pi j f_0 t} + e_g^*(t) e^{-2\pi j f_0 t} \right) \quad (2.56)$$

et

$$h(t) = \frac{1}{2} \left(e_h(t) e^{2\pi j f_0 t} + e_h^*(t) e^{-2\pi j f_0 t} \right) \quad (2.57)$$

Dès lors,

$$y(t) = \frac{1}{4} e^{2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h(\lambda) e_g(t - \lambda) d\lambda \quad (2.58)$$

$$+ \frac{1}{4} e^{-2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h^*(\lambda) e_g^*(t - \lambda) d\lambda \quad (2.59)$$

$$+ \frac{1}{4} e^{-2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h(\lambda) e_g^*(t - \lambda) e^{4\pi j f_0 \lambda} d\lambda \quad (2.60)$$

$$+ \frac{1}{4} e^{2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h^*(\lambda) e_g(t - \lambda) e^{-4\pi j f_0 \lambda} d\lambda \quad (2.61)$$

Les troisième et quatrième termes tendent vers 0 lorsque la fréquence de référence f_0 est largement supérieure aux fréquences utilisées dans la bande de base. Dans ce cas en effet, le signal $e_h^*(\lambda)e_g(t - \lambda)$ fluctue peu pendant une période de l'exponentielle et, moyennant l'hypothèse raisonnable que ce signal est constant sur toute la durée d'une période, l'intégrale se compense demi-cycle par demi-cycle, pour s'annuler. Il reste alors les deux premiers termes

$$y(t) = \frac{1}{2} \text{Re}((e_h(t) \otimes e_g(t)) e^{2\pi j f_0 t}) \quad (2.62)$$

D'où l'on conclut que

$$e_y(t) = \frac{1}{2} e_h(t) \otimes e_g(t) \quad (2.63)$$

À l'exception du facteur $\frac{1}{2}$, le filtrage de l'enveloppe complexe du signal par celle de la réponse impulsionnelle fournit l'enveloppe complexe du signal $y(t)$. Le facteur $\frac{1}{2}$ corrige le facteur 2 qui est introduit dans le signal analytique de la transmittance. En effet, si la normalisation de l'énergie du signal analytique a un sens pour des signaux pris séparément, elle aboutit à une augmentation d'énergie lors des multiplications de ce type de signaux. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre une transmittance passe-bande idéale, pour réaliser que la sortie du filtre sera multipliée par 2 par rapport au signal d'entrée.

On devine tout l'intérêt de ce dernier résultat car il signifie que tout signal passe-bande traité par un système passe-bande peut se calculer à partir d'enveloppes complexes dont les fréquences sont faibles par rapport à la fréquence de référence. Il convient de relever que tous les calculs précédents présupposent que la fréquence de référence soit la même pour toutes les enveloppes complexes.

2.3.1 Illustration : démodulation d'un signal FM

La méthode de démodulation présentée ici est une illustration de l'utilisation du signal analytique et de l'enveloppe complexe. Elle utilise un circuit électrique appelé *discriminateur de fréquences*, dont l'amplitude instantanée de la sortie est directement proportionnelle à la fréquence instantanée du signal FM d'entrée. Étant donné que la fréquence instantanée d'un signal FM est donnée par

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) \quad (2.64)$$

la sortie du discriminateur de fréquence sera donc directement proportionnelle au signal modulant $m(t)$.

Un discriminateur de fréquence est composé d'un *filtre en forme de rampe* suivi d'un *détecteur d'enveloppe*. Un filtre rampe idéal est caractérisé par une transmittance purement imaginaire, variant linéairement avec la fréquence à l'intérieur d'un intervalle de fréquence fixé. Il s'agit ni plus ni moins que de l'expression de la dérivée en termes fréquentiels. Considérons donc le filtre

$$\mathcal{H}_1(f) = \begin{cases} 2\pi ja(f - f_c + \frac{W}{2}) & f_c - \frac{W}{2} \leq f \leq f_c + \frac{W}{2} \\ 2\pi ja(f + f_c - \frac{W}{2}) & -f_c - \frac{W}{2} \leq f \leq -f_c + \frac{W}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.65)$$

où a est une constante. La fonction de transfert $\mathcal{H}_1(f)$ est représentée à la figure 2.6.a.

Nous allons à présent déterminer la réponse de ce filtre, notée $s_1(t)$, lorsqu'on lui applique en entrée un signal FM de fréquence porteuse f_c et dont le spectre est négligeable en dehors de l'intervalle de fréquence $[f_c - W/2, f_c + W/2]$. Pour évaluer $s_1(t)$, il est intéressant d'utiliser la procédure décrite au paragraphe précédent. Nous allons donc remplacer le filtre rampe par un filtre passe-bas équivalent

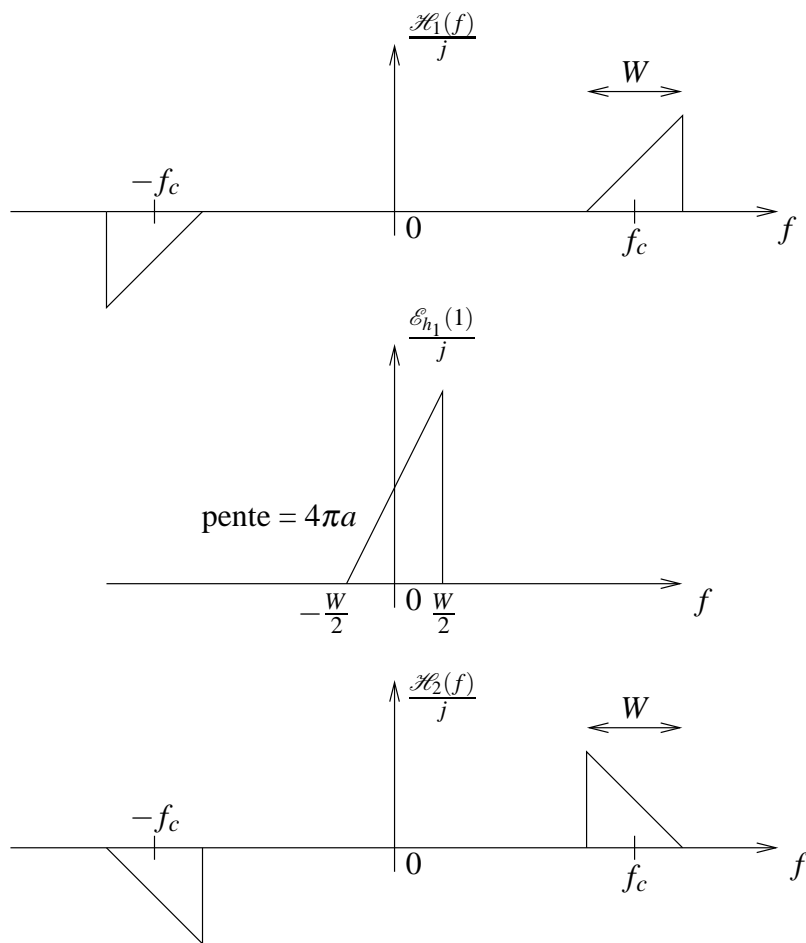


FIG. 2.6 – Réponse fréquentielle du filtre rampe idéal.

et utiliser la notion d'enveloppe complexe. La transformée de FOURIER de l'enveloppe complexe de la réponse impulsionnelle du filtre est simplement donnée par

$$\mathcal{E}_{h_1}(f) = \begin{cases} 4\pi j a \left(f + \frac{W}{2}\right) & -\frac{W}{2} \leq f \leq \frac{W}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.66)$$

qui est montrée à la figure 2.6.b. Le signal FM d'entrée est défini par

$$s(t) = A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(t') dt' \right) \quad (2.67)$$

Le signal analytique $s_a(t)$ relatif à $s(t)$ est simplement égal à

$$s_a(t) = A_c e^{2\pi j f_c t + 2\pi j k_f \int_0^t m(t') dt'} \quad (2.68)$$

et l'enveloppe complexe du signal FM se réduit à

$$e_s(t) = s_a(t) e^{-2\pi j f_c t} \quad (2.69)$$

$$= A_c e^{2\pi j k_f \int_0^t m(t') dt'} \quad (2.70)$$

Étant donnée la théorie développée au paragraphe précédent, le spectre de l'enveloppe complexe du signal de sortie, noté $\mathcal{E}_{s_1}(f)$, est donné par

$$\mathcal{E}_{s_1}(f) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{h_1}(f) \mathcal{E}_s(f) \quad (2.71)$$

$$= \begin{cases} 2\pi j a \left(f + \frac{W}{2}\right) \mathcal{E}_s(f) & f \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.72)$$

où $\mathcal{E}_s(f)$ est la transformée de FOURIER de l'enveloppe complexe de $s(t)$. Comme la multiplication par $2\pi j f$ dans le domaine fréquentiel revient à dériver dans le domaine temporel, il est facile de calculer l'enveloppe complexe du signal de sortie $s_1(t)$ par transformée de FOURIER inverse

$$e_{s_1}(t) = a \left[\frac{de_s(t)}{dt} + \pi j W e_s(t) \right] \quad (2.73)$$

En introduisant l'expression de $e_s(t)$ dans l'expression précédente, on obtient finalement l'expression temporelle de l'enveloppe complexe du signal de sortie

$$e_{s_1}(t) = \pi j W a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{W} m(t) \right] e^{2\pi j k_f \int_0^t m(t') dt'} \quad (2.74)$$

La réponse $s_1(t)$ du filtre rampe est alors donnée par

$$s_1(t) = \operatorname{Re} \left(e_{s_1}(t) e^{2\pi j f_c t} \right) \quad (2.75)$$

$$= \pi W a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{W} m(t) \right] \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(t') dt' + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.76)$$

Le signal $s_1(t)$ est un signal modulé hybride dont l'amplitude et la fréquence varient avec le signal modulant $m(t)$. Cependant, si

$$\left| \frac{2k_f}{W} m(t) \right| < 1 \quad (2.77)$$

pour tout t , nous pouvons utiliser un détecteur d'enveloppe pour retrouver les variations d'amplitude de $s_1(t)$ et donc, à un terme constant près, obtenir le signal modulant $m(t)$. La sortie du détecteur d'enveloppe est alors égale à

$$\|e_{s_1}(t)\| = \pi W a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{W} m(t) \right] \quad (2.78)$$

La composante continue $\pi W a A_c$ est proportionnelle à la pente a de la transmittance du filtre rampe. Cela suggère que cette composante continue peut être éliminée en soustrayant à la sortie $\|e_{s_1}(t)\|$ du détecteur d'enveloppe la sortie d'un second détecteur d'enveloppe précédé par le *filtre rampe complémentaire* dont la transmittance $\mathcal{H}_2(f)$ est représentée à la figure 2.6.c. Ainsi, les enveloppes complexes relatives aux réponses impulsionnelles des deux filtres rampes sont liées par

$$\mathcal{E}_{h_2}(f) = \mathcal{E}_{h_1}(-f) \quad (2.79)$$

Appelons $s_2(t)$ la réponse du filtre rampe complémentaire au signal FM $s(t)$. Alors, en suivant une procédure similaire à celle qui a été faite pour $s_1(t)$, nous pouvons déterminer la sortie du second détecteur d'enveloppe

$$\|e_{s_2}(t)\| = \pi W a A_c \left[1 - \frac{2k_f}{W} m(t) \right] \quad (2.80)$$

où $e_{s_2}(t)$ est l'enveloppe complexe de $s_2(t)$. La différence entre les sorties des deux détecteurs d'enveloppe est le signal $s_0(t)$ donné par

$$s_0(t) = \|e_{s_1}(t)\| - \|e_{s_2}(t)\| \quad (2.81)$$

$$= 4\pi k_f a A_c m(t) \quad (2.82)$$

qui est ainsi débarrassé de toute composante continue.

Nous avons ainsi modélisé le discriminateur de fréquence idéal par une paire de filtres rampes, suivis de détecteurs d'enveloppe et d'un sommateur comme le montre la figure 2.7. Ce schéma est appelé *discriminateur de fréquence balancé*.

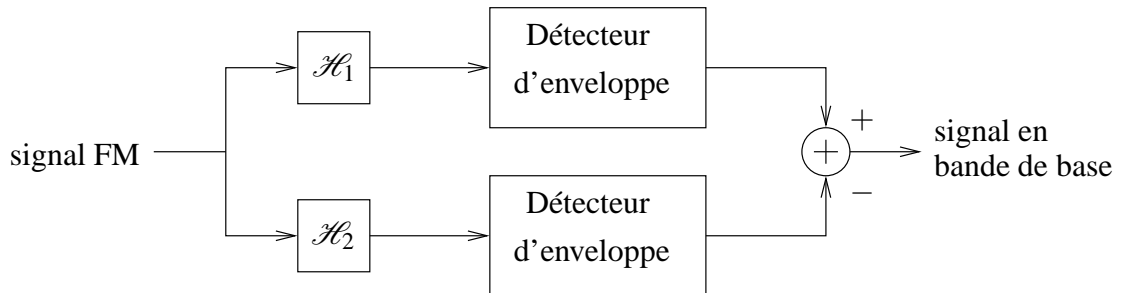


FIG. 2.7 – Schéma bloc idéal du discriminateur de fréquence balancé.

Le schéma idéal de la figure 2.7 peut être approximativement réalisé en utilisant le circuit de la figure 2.8.

Les circuits résonnant LC supérieur et inférieur sont accordés respectivement sur des fréquences supérieure et inférieure à la fréquence de la porteuse f_c . Les réponses fréquentielles de ces deux circuits résonnants, ainsi que leur réponse combinée, sont représentées à la figure 2.9. La linéarité de la portion utile de la réponse globale, centrée sur f_c , est déterminée par la séparation entre les deux fréquences de résonance. Comme le montre la figure 2.9, une séparation de $3B$ donne des résultats satisfaisants, où $2B$ est la bande passante à 3 [dB] de chaque filtre.

Cependant, il y aura des distorsions dans le signal de sortie du discriminateur de fréquences, dues au fait que

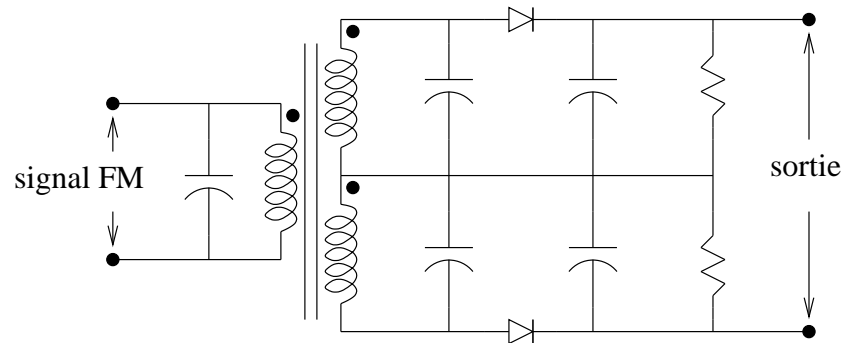


FIG. 2.8 – Schéma électrique du discriminateur de fréquence balancé.

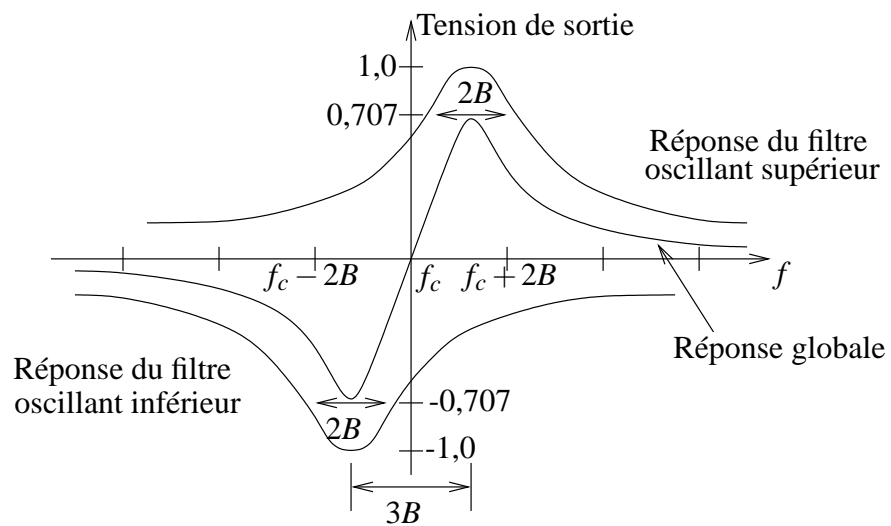


FIG. 2.9 – Réponse fréquentielle des deux circuits résonnants [16, page 179].

- le spectre du signal FM $s(t)$ n'est pas strictement limité à l'intervalle de fréquence $[f_c - W/2, f_c + W/2]$,
- les sorties des circuits résonnants ne sont pas strictement à bande limitée et des distorsions peuvent être introduites par les filtres passe-bas RC suivant les diodes dans les détecteurs d'enveloppe,
- la réponse fréquentielle des circuits résonnants n'est pas linéaire sur toute la bande de fréquence du signal FM.

Cependant, une conception soignée permet de maintenir les distorsions dans des proportions acceptables.

2.4 Représentation des signaux passe-bande aléatoires

Nous allons voir qu'il est possible, comme pour les signaux déterministes du type passe-bande, de caractériser un processus aléatoire stationnaire du type passe-bande en introduisant les notions de signal analytique et d'enveloppe complexe. Soit donc un processus aléatoire $X(t)$, stationnaire et de type passe-bande, c'est-à-dire dont la densité spectrale de puissance $\gamma_X(f)$ est nulle en dehors d'une certaine bande de fréquences.

2.4.1 Signal analytique d'un processus stochastique

Par analogie avec les signaux déterministes, on définit le signal analytique en filtrant le processus stochastique $X(t)$ par un filtre $\mathcal{H}(f)$ qui élimine les fréquences négatives

$$H(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \\ 2 & \text{si } f \geq 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

Par le théorème de WIENER-KINTCHINE, la densité spectrale de puissance du signal analytique est donnée par

$$\gamma_{X_a}(f) = \|\mathcal{H}(f)\|^2 \gamma_X(f) \quad (2.84)$$

$$= \begin{cases} 4\gamma_X(f) & \text{si } f \geq 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

Observons que la densité spectrale de puissance du signal analytique peut encore s'écrire sous la forme $\gamma_{X_a}(f) = 2\mathcal{H}(f)\gamma_X(f)$. Comme la réponse impulsionnelle du filtre $\mathcal{H}(f)$ est égale à

$$h(t) = \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \quad (2.86)$$

il est facile de calculer la fonction d'autocorrélation du signal analytique par transformée de FOURIER inverse

$$\Gamma_{X_a X_a}(\tau) = 2(\Gamma_{XX}(\tau) + j\tilde{\Gamma}_{XX}(\tau)) \quad (2.87)$$

où $\Gamma_{X_a X_a}(\tau)$, $\Gamma_{XX}(\tau)$ et $\tilde{\Gamma}_{XX}(\tau)$ sont respectivement la fonction d'autocorrélation du signal analytique, la fonction d'autocorrélation du processus stochastique $X(t)$ et la transformée de HILBERT de $\Gamma_{XX}(\tau)$.

2.4.2 Enveloppe complexe d'un processus stochastique

Par analogie avec le cas déterministe, on définit la fonction d'autocorrélation de l'enveloppe complexe comme suit

$$\Gamma_{e_X e_X}(\tau) = \Gamma_{X_a X_a}(\tau) e^{-2\pi j f_0 \tau} \quad (2.88)$$

Les densités spectrales de puissance de l'enveloppe complexe et du signal analytique sont alors liées par

$$\gamma_{e_X}(f) = \gamma_{X_a}(f + f_0) \quad (2.89)$$

On peut encore montrer que l'on peut retrouver la fonction d'autocorrélation du processus stochastique $X(t)$ à partir de celle de l'enveloppe complexe

$$\Gamma_{XX}(\tau) = \frac{1}{2} \text{Re}(\Gamma_{X_a X_a}(\tau)) \quad (2.90)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re}(\Gamma_{e_X e_X}(\tau) e^{2\pi j f_0 \tau}) \quad (2.91)$$

Il est finalement possible d'exprimer la densité spectrale de puissance de $X(t)$ en fonction de celle de l'enveloppe complexe. Il suffit de remarquer que la fonction d'autocorrélation de $X(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$\Gamma_{XX}(\tau) = \frac{1}{4} [\Gamma_{e_X e_X}(\tau) e^{2\pi j f_0 \tau} + \Gamma_{e_X e_X}(\tau)^* e^{-2\pi j f_0 \tau}] \quad (2.92)$$

et de calculer la transformée de FOURIER de cette dernière expression

$$\gamma_X(f) = \frac{\gamma_{e_X}(f - f_0) + \gamma_{e_X}^*(-f - f_0)}{4} \quad (2.93)$$

Néanmoins, il est intéressant d'étudier l'enveloppe complexe, non plus en terme de fonction d'autocorrélation, mais directement via son expression temporelle.

2.4.3 Lien entre un processus stochastique et son enveloppe complexe

Par analogie avec le cas déterministe, on peut exprimer l'enveloppe complexe directement sous la forme

$$X(t) = \text{Re}(e_X(t) e^{2\pi j f_0 t}) \quad (2.94)$$

$X(t)$ étant un processus stochastique, l'enveloppe complexe $e_X(t)$ est également un processus stochastique. Écrit tel quel, le processus stochastique $X(t)$ n'est pas stationnaire car sa moyenne dépend du temps, que l'enveloppe complexe soit stationnaire ou non. Comme pour le cas des signaux déterministes, il est nécessaire de stationnariser le signal en introduisant une phase aléatoire Θ uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$. Ainsi, on écrit

$$X(t) = \text{Re}(e_X(t) e^{j(2\pi f_0 t + \Theta)}) \quad (2.95)$$

À partir de cette expression, il est possible de retrouver la fonction d'autocorrélation de $X(t)$. Il suffit de remarquer que

$$X(t) = \frac{1}{2} [e_X(t) e^{j(2\pi f_0 t + \Theta)} + e_X^*(t) e^{-j(2\pi f_0 t + \Theta)}] \quad (2.96)$$

Il vient

$$\begin{aligned} \Gamma_{XX}(t, t - \tau) &= E\{X(t) X^*(t - \tau)\} \\ &= E\{X(t) X(t - \tau)\} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $X(t)$ est réel. En remplaçant $X(t)$ par sa valeur, il vient après calcul des espérances

$$\Gamma_{XX}(t, t - \tau) = \frac{1}{4}E \left\{ e_X(t) e_X^*(t - \tau) e^{2\pi j f_0 \tau} + e_X^*(t) e_X(t - \tau) e^{-2\pi j f_0 \tau} \right\} \quad (2.97)$$

$$= \frac{1}{4}E \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(e_X(t) e_X^*(t - \tau) e^{2\pi j f_0 \tau} \right) \right\} \quad (2.98)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(E \left\{ e_X(t) e_X^*(t - \tau) e^{2\pi j f_0 \tau} \right\} \right) \quad (2.99)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\Gamma_{e_X e_X}(t, t - \tau) e^{2\pi j f_0 \tau} \right) \quad (2.100)$$

Dès lors, si le processus stochastique $X(t)$ est stationnaire, son enveloppe complexe l'est également et on peut écrire

$$\Gamma_{XX}(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\Gamma_{e_X e_X}(\tau) e^{2\pi j f_0 \tau} \right) \quad (2.101)$$

2.4.4 Décomposition de RICE d'un processus stochastique

Comme pour l'enveloppe complexe, on peut définir les composantes en phase et en quadrature d'un processus stochastique

$$e_X(t) = X_I(t) + j X_Q(t) \quad (2.102)$$

La décomposition de RICE du processus stochastique $X(t)$ est alors donnée par

$$X(t) = \operatorname{Re} \left(e_X(t) e^{2\pi j f_0 t} \right) \quad (2.103)$$

$$= \operatorname{Re} \left((X_I(t) + j X_Q(t)) e^{2\pi j f_0 t} \right) \quad (2.104)$$

$$= X_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - X_Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (2.105)$$

Il est important de remarquer que $X_I(t)$ et $X_Q(t)$ sont également des processus stochastiques.

Chapitre 3

Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

3.1 Introduction

La présence du bruit joue un rôle essentiel dans la conception des systèmes de télécommunications. On distingue principalement deux classes de sources de bruit :

- les sources externes au système : bruit atmosphérique, bruit solaire, bruit cosmique, etc,
- les sources internes au système.

Ce ne sont pas tant les sources de bruit et leur nature physique qui nous intéressent mais la manière dont le bruit affecte les signaux utiles.

3.2 Sources physiques de bruit

Le bruit peut avoir différentes origines. Il serait fastidieux de tenter de les décrire tous en détail. Ici, nous nous contenterons d'étudier le bruit thermique jusqu'à formuler une expression utile pour les calculs.

3.2.1 Bruit thermique

Du fait de l'agitation thermique des électrons, une résistance R portée à une température absolue T (c'est-à-dire exprimée en degré KELVIN $[K]$) produit à ses bornes une force électromotrice $E(t)$ qui est une fonction aléatoire. Cet effet, appelé *effet* JOHNSON, fut entre autres étudié par NYQUIST.

L'effort de modélisation consiste à

- décrire le phénomène aléatoire pour une résistance simple,
- analyser l'effet du bruit dans des configurations électriques complexes.

Formules de NYQUIST

Une résistance R portée à une température absolue T $[K]$ possède le schéma équivalent de THÉVENIN de la figure 3.1, comprenant une résistance R dépourvue de bruit et une force électromotrice de bruit thermique $E(t)$ qui est une fonction aléatoire, stationnaire, centrée, gaussienne et qui est en première approximation un bruit blanc de densité spectrale de puissance

$$\gamma_E(f) = 2k_B T R \quad (3.1)$$

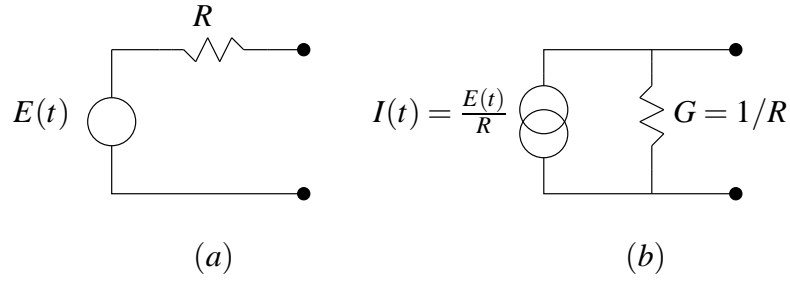


FIG. 3.1 – Équivalents de THÉVENIN (a) et de NORTON (b) correspondant au bruit thermique dans une résistance.

où $k_B = 1,38 \times 10^{-23} [J/K]$ est la constante de BOLTZMANN.

L'équivalent de NORTON fournit quant à lui

$$\gamma(f) = 2k_B T G \quad (3.2)$$

Dépendance fréquentielle

L'étude plus détaillée du phénomène de bruit thermique fait apparaître une dépendance fréquentielle par le biais d'un facteur $p(f)$

$$\gamma_E(f) = 2k_B T R p(f) \quad (3.3)$$

où

$$p(f) = \frac{hf}{k_B T} \frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} \quad (3.4)$$

est le facteur de PLANCK [36]. Dans la gamme de fréquences considérées, il est raisonnable de supposer que la densité spectrale de puissance est constante.

Généralisation à un dipôle d'impédance complexe

Considérons à présent le cas d'un dipôle d'impédance interne complexe Z_s . La densité spectrale de puissance prend alors la forme

$$\gamma_E(f) = 2k_B T \operatorname{Re}(Z_s(f)) \quad (3.5)$$

Dès lors, la valeur quadratique moyenne de la force électromotrice de bruit thermique dans un intervalle $[-f - df, -f] \cup [f, f + df]$ vaut

$$dE^2 = 4k_B T R_s df \quad (3.6)$$

3.3 Caractérisation d'un dipôle

Pour caractériser le bruit d'un dipôle, considérons le schéma tel qu'illustré à la figure 3.2. Par hypothèse, il s'agit d'un circuit localisé¹ tel que

$$Z_s(f) = R_s(f) + jX_s(f) \quad (3.7)$$

est l'impédance de source et $Z_L(f)$ l'impédance de charge.

De plus, en toute généralité, l'impédance est une fonction de la fréquence. Par la suite, ce ne sera plus indiqué explicitement mais cette condition n'en demeure pas moins vraie.

¹On pourrait néanmoins étendre sans peine le développement à des lignes de transmission.

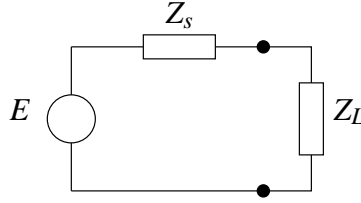


FIG. 3.2 – Une charge connectée à une source.

3.3.1 Puissance disponible

La puissance disponible aux bornes d'un dipôle est un élément essentiel de conception d'un circuit. En effet, on sait que le transfert maximum de puissance a lieu à l'adaptation conjuguée de l'impédance de source. C'est bien évidemment sous ce régime que l'on sera souvent amené à travailler.

Cas des signaux sinusoïdaux

Considérons le cas de signaux sinusoïdaux. La puissance de source fournie par le dipôle P_{sf} vaut

$$P_{sf} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt = \frac{1}{2} \text{Re}(\widehat{V}\widehat{I}^*) \quad (3.8)$$

Dans une charge Z_L

$$\widehat{V} = \frac{\widehat{E}Z_L}{Z_s + Z_L} \quad (3.9)$$

et

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{E}}{Z_s + Z_L} \quad (3.10)$$

On a donc une puissance

$$P_{sf} = \frac{\widehat{E}^2 \text{Re}(Z_L)}{2 \|Z_s + Z_L\|^2} \quad (3.11)$$

On sait que la puissance fournie par le dipôle est maximale à l'adaptation conjuguée. Cette puissance, notée P_{sd} , est appelée *puissance disponible* du dipôle ; elle vaut

$$P_{sd} = \frac{\widehat{E}^2}{8 \text{Re}(Z_s)} \quad (3.12)$$

La puissance disponible dépend de la valeur de crête de la force électromotrice et de la partie réelle du dipôle. C'est donc un invariant pour la famille des impédances dont la partie résistive est identique.

Cas des processus stochastiques

Dans le cas de processus stochastiques, les relations restent valables à condition de les formuler entre densités spectrales de puissance. Examinons la question pour un bruit aléatoire quelconque

$$P_{bf} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T V(t)I(t)dt \quad (3.13)$$

et, après application du théorème de WIENER-KINTCHINE,

$$\gamma_{bd}(f) = \frac{\gamma_E(f)}{4 \text{Re}(Z_s)} \quad (3.14)$$

Remarquons que cette formulation est aussi bien valable pour les signaux utiles délivrés par la source que pour le bruit parasite introduit par cette même source. Au dénominateur, on retrouve un facteur 4 et non 8 comme dans l'expression 3.12. Cela s'explique simplement par le fait que la définition de la puissance disponible P_{sd} s'appuie sur l'expression de la puissance fournie P_{sf} , qui elle fait intervenir les valeurs de crête et donc un facteur $\frac{1}{2}$ supplémentaire.

Exemple. Dans le cas particulier du bruit thermique

$$\gamma_{bd}(f) = \frac{\gamma_E(f)}{4\text{Re}(Z_s)} = \frac{2k_B T \text{Re}(Z_s)}{4\text{Re}(Z_s)} = \frac{k_B T}{2} \quad (3.15)$$

La densité spectrale de bruit disponible dépend donc de la température mais pas de la fréquence ; c'est donc un bruit blanc de densité spectrale uniforme $\frac{k_B T}{2}$.

Résumé

Le tableau 3.1 reprend les principaux résultats énoncés dans cette section.

	Charge quelconque	Adaptation conjuguée
Signaux sinusoïdaux	$P_{sf} = \frac{1}{2} \text{Re}(\widehat{V}\widehat{I}^*) = \frac{\widehat{E}^2 \text{Re}(Z_L)}{2\ Z_s + Z_L\ ^2}$	$P_{sd} = \frac{\widehat{E}^2}{8\text{Re}(Z_s)}$
Signaux stochastiques	$P_{bf} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T V(t)I(t)dt$	$\gamma_{bd}(f) = \frac{\gamma_E(f)}{4\text{Re}(Z_s)}$
Bruit thermique		$\gamma_{bd}(f) = \frac{k_B T}{2}$

TAB. 3.1 – Caractérisation des puissances d'un dipôle.

3.3.2 Température de bruit d'un dipôle linéaire

La relation 3.15 est commode à bien des égards ; en effet, la densité spectrale est uniforme et exprimée comme le produit de constantes par la température absolue. Cette relation a donc été généralisée pour traiter le bruit en général.

Température de bruit ponctuelle

Définition 18 La température de bruit ponctuelle, ou à une fréquence donnée, est la température absolue à laquelle doit être portée une impédance pour produire, par bruit thermique, à cette fréquence, la même densité spectrale de la puissance de bruit disponible que le dipôle considéré.

On a donc, par définition,

$$\gamma_{bd}(f) = \frac{k_B T(f)}{2} \quad (3.16)$$

de sorte que toutes les formules établies pour le bruit thermique sont valables à condition d'utiliser $T(f)$. La définition n'implique cependant pas que le bruit en étude soit d'origine thermique.

On peut comprendre l'idée de l'introduction de la température de bruit ponctuelle en revenant un instant à la nature stochastique des phénomènes. En effet, considérons deux signaux stochastiques de bruit $N(t)$ et $N'(t)$. En prenant l'hypothèse réaliste de bruits statistiquement indépendants, la densité spectrale de la somme $N(t) + N'(t)$ est la somme des densités spectrales : $\gamma_N(f) + \gamma_{N'}(f)$. Or, ces densités spectrales peuvent elles-mêmes s'écrire sous la forme $\frac{1}{2}k_B T$ et $\frac{1}{2}k_B T'$, ce qui fournit la somme $\frac{1}{2}k_B (T + T') = \frac{1}{2}k_B T''$. C'est là tout le principe du recours à une température de bruit ponctuelle du type de T'' .

Température de bruit

Si l'on a affaire à un dipôle dont la densité spectrale est concentrée autour d'une position fréquentielle centrale, on peut définir la *bande passante de bruit* W . La valeur maximale de $T(f)$, notée T , est appelée *température de bruit* du dipôle et la puissance de bruit disponible sur tout l'axe des fréquences est donné par

$$P_{bd}(f) = k_B T W \quad (3.17)$$

3.3.3 Rapport signal à bruit d'un dipôle générateur

Le signal aléatoire délivré par le dipôle se compose du signal utile auquel se superpose un bruit. Dans la mesure où les deux signaux s'additionnent et qu'ils sont statistiquement indépendants, la densité spectrale de la somme est la somme des densités spectrales. Dans l'analyse, on peut donc traiter les signaux séparément.

Définition 19 Le rapport signal à bruit (S/N) du dipôle est défini comme le rapport de la puissance disponible du signal à celle du bruit

$$\frac{S}{N} = \frac{P_{sd}}{P_{bd}} \quad (3.18)$$

Lorsque le signal est modulé, on utilise, par convention, pour la définition de la puissance du signal :

- en modulation d'amplitude ou en modulation angulaire, la puissance de la porteuse non modulée²,
- en modulation d'amplitude à porteuse supprimée, la puissance moyenne du signal, et
- en modulation d'impulsions, la puissance de crête.

3.4 Caractérisation d'un quadripôle

L'étude du bruit dans un quadripôle est complexe en raison de la diversité des fonctions de transfert qu'il permet de réaliser. Pour la simplicité, nous nous limitons au cas du quadripôle linéaire tel que représenté à la figure 3.3.

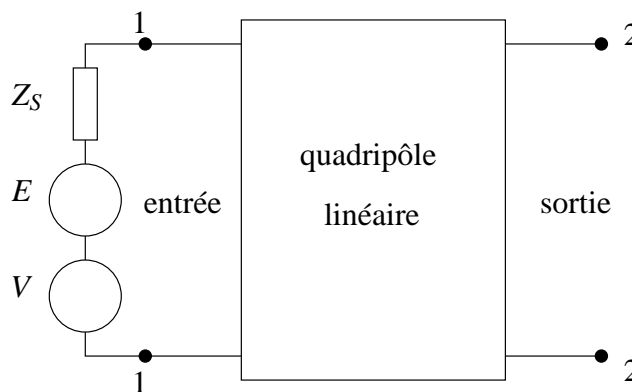


FIG. 3.3 – Schéma d'un quadripôle.

Ce quadripôle peut être un amplificateur ou un atténuateur. Il peut être purement résistif ou non.

²La puissance de la porteuse est souvent notée C . Dès lors, le rapport signal à bruit est plutôt un rapport porteuse à bruit ; on le note $\frac{C}{N}$.

3.4.1 Notion de gain

Par définition, le gain d'un quadripôle est le rapport de la densité spectrale de sortie à la densité spectrale d'entrée ; il dépend de la fréquence considérée. Le cas du mélangeur est atypique car toutes les composantes ne travaillent pas à la même fréquence. Aussi faudrait-il définir plusieurs types de gain. Dans la suite, le cas du mélangeur sera éludé.

3.4.2 Facteur de bruit d'un quadripôle

Introduction

Pour décrire convenablement un quadripôle en sortie, il faut impérativement tenir compte de l'entrée. Ainsi, si l'entrée est un circuit ouvert ou si elle est court-circuitée, la sortie ne sera généralement pas la même.

Lors de la caractérisation du bruit du quadripôle, c'est le bruit interne, produit par le quadripôle, qui nous intéresse. Cette caractérisation nécessite néanmoins que l'on précise le type de circuit placé à l'entrée. Alors, plutôt que de considérer un circuit ouvert ou un court-circuit, on préfère prendre une source de référence proche de la réalité, à savoir une source de bruit thermique de température ambiante de référence. Ce choix conduit à la définition du *facteur de bruit*. Nous verrons ensuite comment traiter une source différente de la source de référence.

Définition 20 [Facteur de bruit] *L'impédance interne du quadripôle générateur étant donnée, le facteur de bruit du quadripôle à la fréquence d'entrée f , noté $F_0(f)$, est le rapport de (1) la densité spectrale de bruit disponible à la sortie du quadripôle, à la fréquence correspondante, lorsque la température de bruit du dipôle générateur est $T_0 = 290 [K]$ à (2) la partie de cette densité spectrale due au bruit du dipôle générateur à la fréquence f .*

Dans cette définition, on peut remplacer le terme “disponible” par “fournie par”.

En raison de l'indépendance statistique des bruits, la densité spectrale de bruit disponible, à une certaine fréquence, à la sortie du quadripôle est la somme de la densité spectrale de bruit disponible du générateur multipliée par le gain, à cette même fréquence, et des densités spectrales de bruit propres au quadripôle. Considérons pour l'étude analytique le dessin de la figure 3.4.

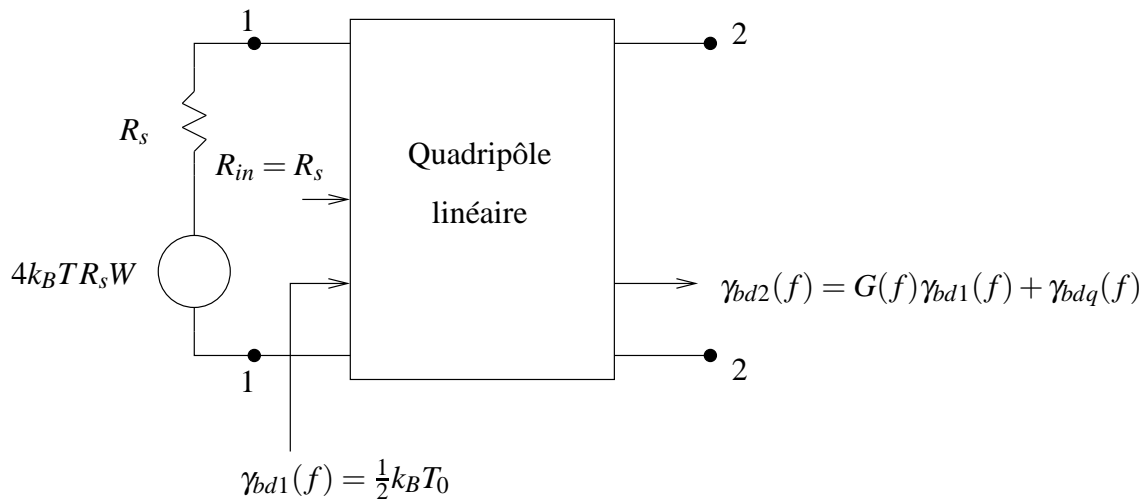


FIG. 3.4 – Schéma d'un quadripôle bruité.

Si l'on considère un dipôle générateur porté à la température T_0 en entrée, on peut écrire la densité spectrale disponible à la sortie sous la forme

$$\gamma_{bd2}(f) = \gamma_{bd1}(f)|_{T=T_0} G(f) + \gamma_{bdq}(f) = \frac{1}{2}k_B T_0 G(f) + \gamma_{bdq}(f) \quad (3.19)$$

Dès lors,

$$F_0(f) = \frac{\gamma_{bd2}(f)}{\gamma_{bd1}(f)|_{T=T_0} G(f)} = 1 + \frac{\gamma_{bdq}(f)}{\frac{1}{2}k_B T_0 G(f)} \quad (3.20)$$

Le facteur de bruit est évidemment supérieur ou égal à l'unité. Il fait l'objet de mesure et caractérise le quadripôle.

Interprétation de la notion de facteur de bruit

Soient $\gamma_{in}(f)$ et $\gamma_{out}(f)$ les densités spectrales du signal utile respectivement à l'entrée et à la sortie du quadripôle. Le rapport du signal à bruit à l'entrée vaut donc

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{\gamma_{in}(f)}{\gamma_{bd1}(f)} \quad (3.21)$$

Pareillement, à la sortie du quadripôle,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{\gamma_{out}(f)}{\gamma_{bd2}(f)} \quad (3.22)$$

Dès lors,

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}} = \frac{\gamma_{in}(f)}{\gamma_{bd1}(f)} \frac{\gamma_{bd2}(f)}{\gamma_{out}(f)} \quad (3.23)$$

Mais, comme le signal est amplifié par un gain $G(f)$, c'est-à-dire que $\gamma_{out}(f) = G(f)\gamma_{in}(f)$, ce rapport devient

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{out}} = \frac{\gamma_{bd2}(f)}{\gamma_{bd1}(f)G(f)} = F_0(f) \quad (3.24)$$

En d'autres termes, le facteur de bruit n'est jamais que le quotient du rapport signal à bruit en entrée par le rapport signal à bruit en sortie. Il représente donc la dégradation du rapport signal à bruit, après passage dans un quadripôle.

Circuits équivalents

À partir du facteur de bruit, on peut aussi calculer la puissance de bruit disponible en sortie

$$\gamma_{bd2}(f) = \gamma_{bd1}(f)|_{T=T_0} G(f) F_0(f) \quad (3.25)$$

Cette formulation permet d'exprimer le bruit injecté par le quadripôle par un bruit équivalent qui serait placé à l'entrée. Le dessin de la figure 3.5 montre les deux circuits équivalents.

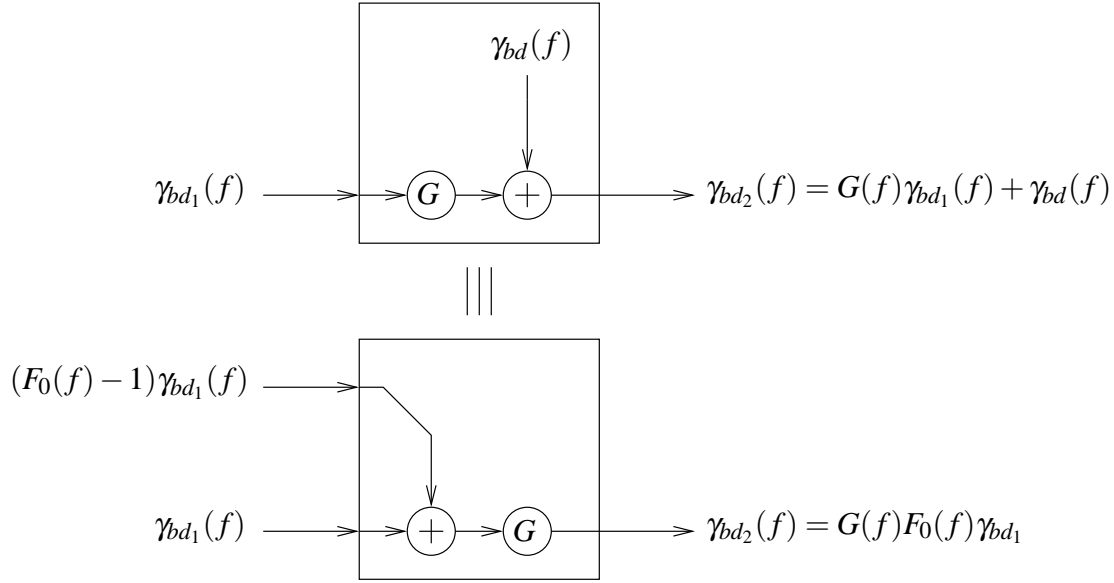


FIG. 3.5 – Un quadripôle bruité et son schéma équivalent.

Facteur de bruit moyen

Le facteur de bruit traduit la dégradation du rapport signal à bruit en sortie du quadripôle. Comme il dépend de la fréquence, on lui préfère parfois le facteur de bruit moyen.

Définition 21 *Le facteur de bruit moyen est le rapport de (1) la puissance de bruit disponible à la sortie du quadripôle à (2) la partie de cette puissance due au dipôle générateur supposé à la température de bruit $T_0 = 290 [K]$.*

Par définition du facteur de bruit ponctuel, la puissance de bruit disponible à la sortie du quadripôle possède une densité spectrale

$$\gamma_{bd2}(f) = \frac{1}{2}k_B T_0 G(f) F_0(f) \quad (3.26)$$

on a alors l'expression du facteur de bruit moyen

$$F_{0m} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}k_B T_0 G(f) F_0(f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}k_B T_0 G(f) df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) F_0(f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df} \quad (3.27)$$

Facteur de mérite

Il s'agit d'une grandeur qui n'est pas normalisée, contrairement au facteur de bruit.

Si la température de bruit du dipôle était $T_s \neq T_0$, on pourrait définir un facteur de bruit $F(f)$, en reprenant point par point le raisonnement précédent. En égalant la densité spectrale de bruit propre au quadripôle

$$\gamma_{bdq}(f) = (F_0(f) - 1) \frac{1}{2}k_B T_0 G(f) \quad (3.28)$$

$$= (F(f) - 1) \frac{1}{2}k_B T_s G(f) \quad (3.29)$$

Comme le gain n'est a priori pas fonction de la température, pour toute fréquence f ,

$$(F - 1)T_s = (F_0 - 1)T_0 \quad (3.30)$$

d'où

$$F = 1 + \frac{T_0}{T_s}(F_0 - 1) \quad (3.31)$$

et une relation identique entre F_{0m} et F_m . F , appelé *facteur de mérite*, exprime la dégradation du rapport signal à bruit lorsque la température du dipôle générateur est T_s .

3.4.3 Température de bruit effective du quadripôle

Pour des quadripôles à faible bruit, le facteur de bruit est proche de 1. Il est donc malaisé de comparer des quadripôles à faible bruit. On utilisera alors plutôt la notion de température effective issue du développement suivant

$$\gamma_{bd2}(f) = \frac{1}{2}k_B T_s G(f) + \gamma_{bdq}(f) \quad (3.32)$$

$$= \frac{1}{2}k_B [T_s + (F_0 - 1)T_0] G(f) \quad (3.33)$$

et la densité spectrale de la puissance de bruit disponible à la sortie du quadripôle est équivalente à celle que l'on aurait si, le quadripôle n'étant pas bruyant, la température de bruit du dipôle était augmentée de

$$T_e = (F_0 - 1)T_0 \quad (3.34)$$

Cette quantité est appelée *température de bruit effective* du quadripôle à la fréquence considérée. On définit de même la température effective moyenne

$$T_{em} = (F_{0m} - 1)T_0 \quad (3.35)$$

3.4.4 Lien entre facteur de bruit et température effective

L'équation 3.34 fournit une relation immédiate entre le facteur de bruit et la température effective. Cette relation vaut

$$F_0 = \frac{T_0 + T_e}{T_0} = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad (3.36)$$

3.4.5 Cas particulier : quadripôle atténuateur résistif

Considérons un circuit résistif atténuateur, caractérisé par un facteur d'atténuation L entre les puissances disponibles d'entrée et de sortie. Ce facteur d'atténuation définit une sorte de gain inverse $G = 1/L$.

Cet atténuateur purement résistif est supposé être à la même température T_0 que la résistance équivalente d'entrée. La puissance de bruit disponible en sortie vaut donc

$$\gamma_{bd2}(f) = \frac{1}{2}k_B T_0 \quad (3.37)$$

Si on caractérise l'atténuateur par sa température effective T_e ,

$$\gamma_{bd2}(f) = \frac{1}{2}k_B (T_0 + T_e) \frac{1}{L} \quad (3.38)$$

En combinant ces deux relations, on obtient

$$T_e = (L - 1)T_0 \quad (3.39)$$

Dès lors,

$$F_0 = 1 + \frac{(L - 1)T_0}{T_0} \quad (3.40)$$

soit encore

$$F_0 = 1 + \frac{(L - 1)T_0}{T_0} = L \quad (3.41)$$

pour un atténuateur à température ambiante T_0 . Autrement dit, la facteur de mérite est égal au facteur d'atténuation.

3.5 Cascade de quadripôles

Pour analyser le bruit dans une cascade de quadripôles, on fait l'hypothèse d'une adaptation entre les quadripôles et on utilise une même température de référence (choisie ici égale à T_0) pour la définition des facteurs de bruit –autrement dit, une référence de bruit identique à l'entrée. L'utilisation des schémas équivalents aboutit à la représentation graphique des quadripôles en cascade de la figure 3.6, où l'on a simplifié la notation en ignorant la dépendance fréquentielle des facteurs de bruit et des gains. De plus, on considère que $\gamma_{bd1}(f)|_{T=T_0}$ est la référence de bruit commune.

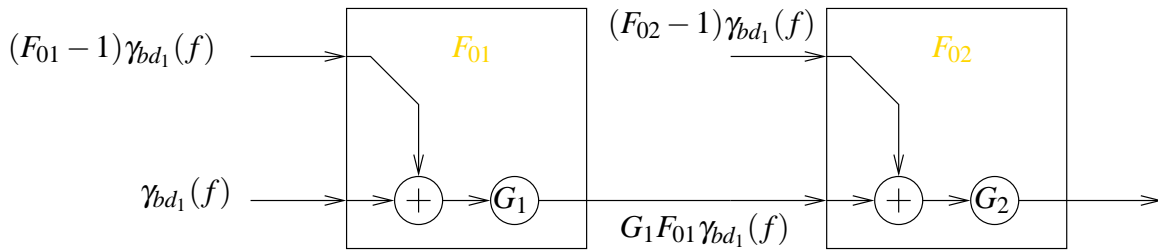


FIG. 3.6 – Mise en cascade de quadripôles.

En sortie du premier quadripôle,

$$\gamma_{bd}(f) = \gamma_{bd1}(f)|_{T=T_0} G_1 F_{01} \quad (3.42)$$

Ce bruit passe à travers le second quadripôle. À la sortie de ce dernier, on a une densité spectrale de bruit qui est la somme du bruit d'entrée multiplié par le gain et le bruit propre

$$\gamma_{bd}(f) = \gamma_{bd1}(f)|_{T=T_0} G_1 G_2 F_{01} + \gamma_{bd1}(f)|_{T=T_0} G_2 (F_{02} - 1) \quad (3.43)$$

Dès lors

$$F_0 = \frac{G_1 G_2 F_{01} + G_2 (F_{02} - 1)}{G_1 G_2} = F_{01} + \frac{F_{02} - 1}{G_1} \quad (3.44)$$

Plus généralement, pour un quadripôle à n étages,

$$F_0 = F_{01} + \frac{F_{02} - 1}{G_1} + \frac{F_{03} - 1}{G_1 G_2} + \dots = F_{01} + \sum_{i=2}^n \frac{F_{0i} - 1}{\prod_{j=1}^{i-1} G_j} \quad (3.45)$$

De même,

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1 G_2} + \dots = T_{e1} + \sum_{i=2}^n \frac{T_{ei}}{\prod_{j=1}^{i-1} G_j} \quad (3.46)$$

On voit donc qu'il est préférable de placer l'amplificateur de gain important et de facteur de bruit faible en tête de chaîne.

Deuxième partie

Aspects systèmes des chaînes télécommunications

Chapitre 4

Modulations numériques

4.1 Introduction

À l'instar de la modulation analogique, la modulation numérique est une opération qui transpose le spectre d'un signal numérique pour l'amener autour d'une fréquence porteuse.

Il existe de nombreux critères guidant le choix d'un type de modulation. Il va de soi que l'importance relative d'un critère dépend de l'application envisagée.

Les critères de comparaison sont classés en trois catégories principales (d'après [3])

1. la résistance aux distorsions et aux interférences ; cette classe comporte les critères de
 - (a) la *résistance au bruit* en terme de probabilité d'erreur, celle-ci étant généralement une fonction du rapport énergie à bruit E_b/N_0 ,
 - (b) la sensibilité aux interférences dues à des *multitrajets*,
 - (c) la sensibilité aux imperfections des *filtres* qui produit de l'interférence entre les symboles numériques,
 - (d) la sensibilité aux *non-linéarités*,
2. l'occupation spectrale caractérisée par
 - (a) l'*efficacité spectrale* exprimée en (bit/seconde) par HERTZ $[b/s/Hz]$, qui représente le débit binaire que l'on peut transmettre dans un canal large de 1 $[Hz]$ pour un type de modulation,
 - (b) le *comportement asymptotique* de la densité spectrale de puissance, c'est-à-dire la rapidité de décroissance de la courbe de densité spectrale de puissance en fonction de la fréquence,
3. la simplicité d'implémentation.

Dans un premier temps, nous aborderons les modulations numériques au moyen d'un formalisme général. Nous traiterons ensuite quelques exemples communs de modulations numériques linéaires comme la modulation de phase à deux états BPSK, la modulation de phase en quadrature QPSK ou la modulation MSK.

4.2 Définition des modulations numériques

4.2.1 Formulation générale

Soit $m(t)$ un signal en bande de base préalablement mis en forme ; il s'agit par exemple d'un signal NRZ. Un modulateur numérique transforme le signal modulant $m(t)$ en fournissant le signal

modulé $s(t)$ suivant

$$s(t) = \text{Re} \left(\psi[m(t)] e^{j(2\pi f_c t + \varphi_c)} \right) \quad (4.1)$$

où f_c est la fréquence porteuse du signal modulé et φ_c une phase constante. $\psi[m(t)]$ est une fonction du signal $m(t)$ et constitue l'enveloppe complexe $e_s(t)$ du signal modulé. Étant donnée la forme de l'équation (4.1), le signal $s(t)$ est réel et passe-bande autour de la fréquence f_c .

4.2.2 Typologie des modulations

La fonction complexe $\psi(\cdot) = \psi_I(\cdot) + j\psi_Q(\cdot)$ définit le type de modulation. On distingue généralement deux types de modulations :

- les *modulations linéaires* pour lesquelles $\psi[m(t)]$ est une fonction linéaire de $m(t)$.
- les *modulations angulaires* pour lesquelles $\psi[m(t)]$ a la forme

$$\psi[m(t)] = e^{j\varphi[m(t)]} \quad (4.2)$$

où $\varphi[m(t)]$ est une fonction linéaire de $m(t)$.

Le signal modulé peut également s'exprimer par les relations

$$s(t) = \psi_I[m(t)] \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - \psi_Q[m(t)] \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (4.3)$$

qui met en évidence la composante en phase $\psi_I[m(t)]$ et en quadrature $\psi_Q[m(t)]$ du signal modulé, et

$$s(t) = \|\psi[m(t)]\| \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \arg \psi[m(t)]) \quad (4.4)$$

qui, cette fois, met en évidence l'enveloppe et la phase du signal modulé.

Par la suite, nous nous concentrerons essentiellement sur les modulations numériques linéaires qui s'expriment par

$$s(t) = \text{Re} \left(e^{j(2\pi f_c t + \varphi_c)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(t) e^{j(\theta_k - 2\pi f_c kT)} \right) \quad (4.5)$$

où les signaux $d_k(t)$ contiennent l'information à transmettre et θ_k est une phase constante. Deux types de modulation linéaire seront détaillées :

- les *modulations "classiques"*, pour lesquelles $\theta_k = 2\pi f_c kT$, et
- les *modulations à décalage* (ou *offset*), pour lesquelles $\theta_k = 2\pi f_c kT + k\frac{\pi}{2}$.

4.3 Modulations linéaires "classiques"

4.3.1 Description

Les modulations linéaires classiques sont telles que $\theta_k = 2\pi f_c kT$. Dès lors, le signal modulé prend la forme

$$s(t) = \text{Re} \left(e_s(t) e^{j(2\pi f_c t + \varphi_c)} \right) \quad (4.6)$$

où l'enveloppe complexe s'exprime par

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(t) \quad (4.7)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k g_k(t - kT) \quad (4.8)$$

Le signal $g_k(t)$ est un signal de mise en forme réel (non complexe). Pour la simplicité, nous choisirons une onde de mise en forme unique $g_k(t) = g(t), \forall k$. D_k est une variable aléatoire complexe qui contient l'information numérique à transmettre. Elle prendra généralement la forme $D_k = A_k + jB_k$ où A_k et B_k sont deux variables aléatoires réelles.

L'enveloppe complexe s'exprime également par $e_s(t) = s_I(t) + js_Q(t)$ où les signaux réels $s_I(t)$ et $s_Q(t)$ représentent respectivement la composante en phase et en quadrature

$$s_I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT) \quad (4.9)$$

$$s_Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k g(t - kT) \quad (4.10)$$

ce qui conduit à l'expression suivante du signal modulé

$$s(t) = s_I(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - s_Q(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (4.11)$$

soit encore, en remplaçant s_I et s_Q par leur valeur,

$$s(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT) \right] \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k g(t - kT) \right] \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (4.12)$$

En toute généralité donc, le signal modulé peut être vu comme la modulation en quadrature de deux signaux numériques en bande de base (de type NRZ).

4.3.2 Calcul de la densité spectrale de puissance

Le calcul de la densité spectrale de puissance d'un processus stochastique n'a véritablement de sens que si ce processus est stationnaire au sens large. Pour rappel un processus aléatoire $X(t)$ est stationnaire au sens large si les deux conditions suivantes sont remplies

- sa moyenne μ_X est indépendante du temps t ,
- sa fonction d'autocorrélation $\Gamma_{XX}(t, t - \tau) = E\{X(t)X^*(t - \tau)\}$ ne dépend que de la différence de temps τ entre les instants d'observation. La fonction d'autocorrélation est alors notée $\Gamma_{XX}(\tau)$.

La densité spectrale de puissance d'un processus stochastique stationnaire au sens large s'obtient en calculant la transformée de FOURIER de sa fonction d'autocorrélation.

Densité spectrale du puissance du signal modulé

Le signal numérique modulé est un processus stochastique $S(t)$ que l'on peut écrire, en prenant arbitrairement $\varphi_c = 0$, sous la forme

$$S(t) = \text{Re} \left(M(t) e^{j2\pi f_c t} \right) \quad (4.13)$$

où $M(t)$ est un processus stochastique complexe. Remarquons tout d'abord que le processus stochastique $S(t)$ n'est pas stationnaire au sens large vu car sa moyenne dépend du temps. Il est donc nécessaire de stationnariser le signal. Pour cela, nous ajoutons une phase aléatoire Θ uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$

$$S(t) = \text{Re} \left(M(t) e^{j(2\pi f_c t + \Theta)} \right) \quad (4.14)$$

Comme le processus stochastique $M(t)$ et la variable aléatoire Θ sont non-corrélés, il est aisé de montrer que la moyenne du processus stochastique $S(t)$ est nulle et donc indépendante du temps.

Fonction d'autocorrélation. Déterminons la fonction d'autocorrélation du signal modulé

$$\Gamma_{SS}(t, t - \tau) = E \{ S(t) S^*(t - \tau) \} \quad (4.15)$$

$$= E \{ S(t) S(t - \tau) \} \quad (4.16)$$

où nous avons utilisé le fait que le signal modulé est réel. Comme

$$S(t) = \frac{1}{2} \left[M(t) e^{j(2\pi f_c t + \Theta)} + M^*(t) e^{-j(2\pi f_c t + \Theta)} \right] \quad (4.17)$$

et, en remplaçant $S(t)$ par sa valeur, le calcul des espérances fournit¹

$$\Gamma_{SS}(t, t - \tau) = \frac{1}{4} E \left\{ M(t) M^*(t - \tau) e^{j2\pi f_c \tau} + M^*(t) M(t - \tau) e^{-j2\pi f_c \tau} \right\} \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{4} E \left\{ 2 \operatorname{Re} \left(M(t) M^*(t - \tau) e^{j2\pi f_c \tau} \right) \right\} \quad (4.19)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(E \left\{ M(t) M^*(t - \tau) e^{j2\pi f_c \tau} \right\} \right) \quad (4.20)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\Gamma_{MM}(t, t - \tau) e^{j2\pi f_c \tau} \right) \quad (4.21)$$

Densité spectrale de puissance. Dès lors, il vient que, si l'enveloppe complexe $M(t)$ est un processus stochastique stationnaire au sens large, le signal modulé $S(t)$ est également stationnaire au sens large. Il est alors possible de calculer sa densité spectrale de puissance en prenant la transformée de FOURIER de sa fonction d'autocorrélation. Étant donné que

$$\Gamma_{SS}(\tau) = \frac{1}{4} \left[\Gamma_{MM}(\tau) e^{j2\pi f_c \tau} + \Gamma_{MM}^*(\tau) e^{-j2\pi f_c \tau} \right] \quad (4.22)$$

il vient finalement

$$\gamma_S(f) = \frac{\gamma_M(f - f_c) + \gamma_M^*(-f - f_c)}{4} \quad (4.23)$$

où $\gamma_M(f)$ est la densité spectrale de puissance de l'enveloppe complexe $M(t)$.

Densité spectrale de l'enveloppe complexe

L'enveloppe complexe du signal modulé est un processus stochastique complexe exprimé par

$$M(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k g(t - kT) \quad (4.24)$$

La séquence de variables aléatoires D_k est caractérisée par

- sa moyenne : $\mu_D = E \{ D_k \}$
- sa variance : $\sigma_D^2 = E \{ (D_k - \mu_D) (D_k - \mu_D)^* \}$
- sa fonction d'autocorrélation : $\Gamma_{AA}(k, k - l) = E \{ D_k D_{k-l}^* \}$
- sa fonction d'autocovariance : $C_{AA}(k, k - l) = E \{ (D_k - \mu_D) (D_{k-l} - \mu_D)^* \}$

Après stationnarisation de la séquence de variables aléatoires D_k , on montre (voir cours de “Principes des télécommunications analogiques et numériques”) que la densité spectrale de puissance de $M(t)$ est donnée par

$$\gamma_M(f) = \|\mathcal{G}(f)\|^2 \frac{\gamma_D(fT)}{T} \quad (4.25)$$

¹En fait, l'espérance des deux termes faisant intervenir la variable aléatoire Θ est nulle.

où

$$\gamma_D(fT) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{DD}(l) e^{-j2\pi l f T} \quad (4.26)$$

Si on ajoute l'hypothèse de variables aléatoires D_k non-corrélées² ($C_{DD}(k, k-l) = 0$), on montre que

$$\gamma_M(f) = \frac{\|\mathcal{G}(f)\|^2}{T} \left[\sigma_D^2 + \|\mu_D\|^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \right] \quad (4.27)$$

La densité spectrale de puissance de l'enveloppe complexe $M(t)$ est donc réelle et symétrique.

La densité spectrale en conclusion

En conséquence des relations 4.23 et 4.27, la densité spectrale de puissance du signal modulé est fournie par

$$\gamma_S(f) = \frac{\gamma_M(f - f_c) + \gamma_M(f + f_c)}{4} \quad (4.28)$$

La seule connaissance de l'enveloppe complexe et de la fréquence porteuse permet donc de déterminer la densité spectrale d'un signal numérique classique.

4.3.3 Modulation d'amplitude numérique (Amplitude Shift Keying)

Description

La modulation d'amplitude numérique (ASK) est une version simple des modulations numériques linéaires classiques. Elle est caractérisée par une variable aléatoire D_k purement réelle ($B_k = 0$). L'enveloppe complexe d'un signal modulé ASK, qui vaut

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT) \quad (4.29)$$

est donc purement réelle.

Il est courant de choisir comme signal de mise en forme une impulsion rectangulaire de durée T

$$g(t) = \text{rect}_{[0,T]}(t) \quad (4.30)$$

Pour arriver à interpréter le signal modulé, on détermine l'enveloppe $a(t)$ et la phase $\varphi(t)$ du signal modulé. Ces deux signaux s'obtiennent aisément à partir de l'enveloppe complexe par la relation

$$e_s(t) = a(t) e^{j\varphi(t)} \quad (4.31)$$

Étant donné que la variable aléatoire A_k peut s'écrire $A_k = \|A_k\| e^{(1-\text{sgn}(A_k))\frac{\pi}{2}j}$, nous pouvons déduire

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|A_k\| \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (4.32)$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{2} (1 - \text{sgn}(A_k)) \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (4.33)$$

²La non-corrélation des symboles successifs garantit un transfert d'information maximum. Mais en contrepartie de l'absence de redondance, l'information est très sensible à des effets de bruit.

Il apparaît que l'enveloppe du signal varie par paliers, ce qui est un inconvénient si le signal passe au travers d'un canal affectant l'amplitude ou d'un système non-linéaire, comme par exemple un amplificateur travaillant à saturation. Quant à la phase, elle marque des discontinuités par sauts de π . Ces sauts de phase sont également critiques car il nécessite des filtres de réception à large bande passante sous peine de détériorer le signal modulé.

Cas particulier : modulation d'amplitude numérique à deux états (ASK-2)

Dans le cas de la modulation ASK-2, la variable aléatoire A_k peut prendre deux valeurs : $+A$ ou $-A$. Pour cette modulation, on voit que l'enveloppe du signal est constante. Par contre, la phase subit toujours des sauts de π radians toutes les T secondes.

Il est courant de représenter une modulation par un *diagramme de constellations* ou *diagramme des états de phase*, qui n'est rien d'autre que le plan complexe de la variable aléatoire complexe D_k , dans lequel on représente toutes les valeurs que peut prendre D_k . On attribue le signal $g(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$, correspondant à A_k , à l'axe réel pour faire référence à la composante en phase et $-g(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c)$, correspondant à B_k , à l'axe imaginaire pour faire référence à la composante en quadrature.

La présence de $g(t)$ signifie que le diagramme de constellations est indépendant du signal de mise en forme. La figure 4.1 montre le diagramme de constellations pour la modulation ASK-2.

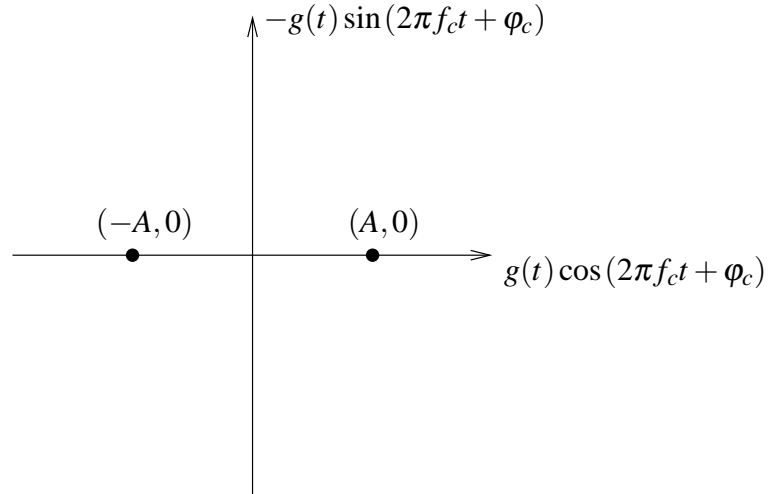


FIG. 4.1 – Diagramme des états de phase de la modulation ASK-2 ou BPSK.

Densité spectrale de puissance de l'ASK-2

Déterminons à présent la densité spectrale de puissance du signal modulé ASK-2. Commençons par déterminer la densité spectrale de puissance de l'enveloppe complexe. Nous ferons l'hypothèse que les deux amplitudes $\pm A$ sont équiprobables. La moyenne μ_A de la variable aléatoire A_k est donc nulle. Sa variance est donnée par $\sigma_A^2 = E\{A_k^2\} = A^2$. Le signal de mise en forme étant la fonction $\text{rect}_{[0,T]}(t)$, sa transformée de FOURIER vaut

$$\mathcal{G}(f) = e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} T \text{sinc}(fT) \quad (4.34)$$

Il en résulte une densité spectrale de puissance pour l'enveloppe complexe donnée par

$$\gamma_{e_s}(f) = A^2 T \text{sinc}^2(fT) \quad (4.35)$$

et finalement une densité spectrale de puissance du signal modulé valant

$$\gamma_s(f) = \frac{A^2 T}{4} \{ \text{sinc}^2[(f - f_c)T] + \text{sinc}^2[(f + f_c)T] \} \quad (4.36)$$

Comme la variable aléatoire A_k ne peut prendre que deux valeurs dans le cas de la modulation ASK-2, le signal modulé ne transmet qu'un seul bit d'information pendant la durée T . Il vient donc que la densité spectrale de puissance d'un signal ASK-2 est donnée par la relation 4.36 pour $T = T_b$ où $R_b = 1/T_b$ est le débit binaire, encore appelé *fréquence bit*, exprimé en $[b/s]$.

4.3.4 Modulation de phase numérique (Phase Shift Keying)

Description

Bien que la modulation PSK soit une modulation de phase, nous allons montrer que ce type de modulation fait partie intégrante des modulations linéaires classiques. Typiquement, un signal modulé PSK a la forme

$$s(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \psi_k) \quad (4.37)$$

où ψ_k est une variable aléatoire constante sur l'intervalle de temps $[kT, (k+1)T[$, pouvant prendre N valeurs possibles D

$$\psi_k \in \left\{ \psi \mid \psi = \varphi_0 + i \frac{2\pi}{N}, i = 0, \dots, N-1 \right\} \quad (4.38)$$

Le signal modulé a donc une enveloppe constante et subit un saut de phase toutes les T secondes.

Cherchons à présent à faire le lien avec les modulations linéaires classiques. Pour cela, nous réécrivons $s(t)$ sous la forme

$$\begin{aligned} s(t) &= A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) [\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \cos \psi_k - \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \sin \psi_k] \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A \cos \psi_k \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \right] \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$- \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A \sin \psi_k \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \right] \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (4.40)$$

L'enveloppe complexe du signal s'en déduit donc

$$e_s(t) = s_I(t) + j s_Q(t) \quad (4.41)$$

$$= A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) (\cos \psi_k + j \sin \psi_k) \quad (4.42)$$

Nous retrouvons donc bien l'expression générale de l'enveloppe complexe d'un signal numérique linéaire classique pour lequel

$$D_k = A e^{j\psi_k} \quad (4.43)$$

$$g(t) = \text{rect}_{[0,T]}(t) \quad (4.44)$$

Il est alors aisé de déterminer l'enveloppe et la phase du signal modulé :

$$a(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (4.45)$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (4.46)$$

Nous retrouvons bien évidemment que l'enveloppe du signal modulé est constante et que la phase varie par paliers de manière discontinue.

Cas particulier : modulation PSK-2 ou BPSK

La modulation BPSK est une modulation à 2 états correspondant à $\psi_k \in \{0, \pi\}$. La variable aléatoire D_k peut donc prendre les valeurs $\{A e^{j0}, A e^{j\pi}\}$, ce qui correspond à $\{(A, 0), (-A, 0)\}$. La modulation BPSK correspond ainsi exactement à la modulation ASK-2. Son plan de constellations est donc également celui de la figure 4.1.

Densité spectrale de puissance. Les modulations ASK-2 et BPSK étant identiques, elles ont même densité spectrale de puissance ($T = T_b$). Elle est exprimée par

$$\gamma_s(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \{ \text{sinc}^2[(f - f_c) T_b] + \text{sinc}^2[(f + f_c) T_b] \} \quad (4.47)$$

4.3.5 Modulation en quadrature de phase (Quadrature Phase Shift Keying)

Description

La modulation en quadrature de phase (QPSK) correspond à une modulation PSK-4, c'est donc une modulation à 4 états ($M = 4$). La phase ψ_k peut prendre les valeurs $\{-3\pi/4, -\pi/4, +\pi/4, +3\pi/4\}$. Autrement dit, la variable aléatoire D_k prend une des valeurs suivantes³

$$D_k \in \left\{ A e^{-j\frac{3\pi}{4}}, A e^{-j\frac{\pi}{4}}, A e^{j\frac{\pi}{4}}, A e^{j\frac{3\pi}{4}} \right\} \quad (4.48)$$

Le diagramme de constellations est représenté à la figure 4.2.

Considérons une source binaire fournissant le train d'impulsions suivant

$$I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k \delta(t - kT_b) \quad (4.49)$$

où $I_k = +1$ correspond à l'information binaire 1 et $I_k = -1$ correspond à l'information binaire 0. Le débit binaire est égal à $R_b = 1/T_b$. À partir de la séquence $I(t)$, nous formons les deux séquences

$$s_I(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k} g(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT) \quad (4.50)$$

$$s_Q(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k+1} g(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k g(t - kT) \quad (4.51)$$

³On utilise parfois l'ensemble de ces valeurs décalées de $\frac{\pi}{4}$, ce qui conduit à l'ensemble des phases possibles suivant : $\{-A, A e^{-j\frac{\pi}{2}}, A, A e^{j\frac{\pi}{2}}\}$.

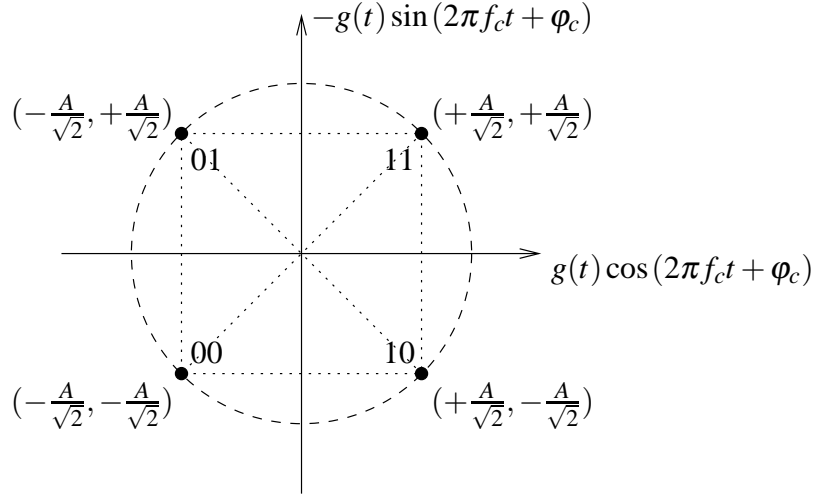


FIG. 4.2 – Diagramme de constellations pour la modulation QPSK.

où $T = 2T_b$, $g(t)$ est une impulsion de mise en forme de durée T , $A_k = I_{2k} \frac{A}{\sqrt{2}}$ et $B_k = I_{2k+1} \frac{A}{\sqrt{2}}$. Ces deux séquences correspondent respectivement aux bits pairs et impairs de la séquence de départ et constituent les composantes en phase $s_I(t)$ et en quadrature $s_Q(t)$ du signal modulé QPSK. La figure 4.3 illustre la formation de ces séquences pour un signal de mise en forme égal à

$$g(t) = \text{rect}_{[0,T]}(t) = \text{rect}_{[0,2T_b]}(t) \quad (4.52)$$

qui correspond à la modulation QPSK classique.

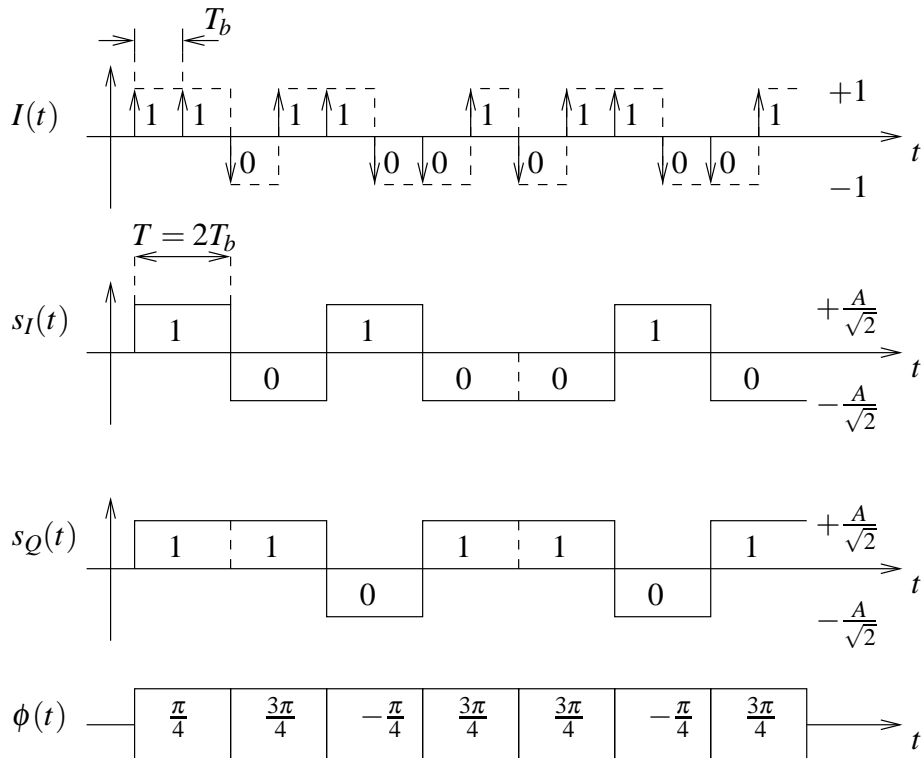


FIG. 4.3 – Formation des composantes en phase et en quadrature pour la modulation QPSK (avec mise en forme par un signal rectangulaire).

Nous allons à présent déterminer l'enveloppe et la phase instantanée pour une impulsion de mise en forme rectangulaire. L'enveloppe complexe est donnée par

$$e_s(t) = s_I(t) + j s_Q(t) \quad (4.53)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (A_k + j B_k) \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (4.54)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (I_{2k} + j I_{2k+1}) \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (4.55)$$

Il vient alors

$$a(t) = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)} \quad (4.56)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{I_{2k}^2 + I_{2k+1}^2} \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (4.57)$$

$$= A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (4.58)$$

et

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \tan^{-1} \left(\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} \right) \quad (4.59)$$

Nous voyons donc que l'enveloppe du signal modulé est constante et égale à A . Le rapport I_{2k+1}/I_{2k} peut prendre les valeurs ± 1 , ce qui correspondrait à 2 états seulement. Cependant, la fonction \tan^{-1} est définie à π radians près. En fait, pour déterminer la phase, il faut se référer au plan de constellations (figure 4.2).

La phase varie donc par paliers de manière discontinue. La figure 4.3 montre la valeur instantanée de $\varphi(t)$ pour une séquence binaire donnée. On peut remarquer que la phase peut subir des sauts de $\pm \frac{\pi}{2}$ ou de $\pm \pi$ toutes les T secondes. Ces différentes transitions sont représentées en pointillés sur la figure 4.2. Lors des transitions $\pm \pi$, on voit que l'enveloppe instantanée du signal peut s'annuler pendant le temps de la transition (passage par zéro dans le plan des constellations). En effet, des transitions instantanées sont irréalisables physiquement. Si le signal est filtré, il peut perdre sa propriété d'enveloppe constante, ce qui est gênant lorsque qu'il passe dans un système présentant des distorsions d'amplitude. Enfin, des sauts brusques de phase impliquent également une bande passante plus importante. La figure 4.4 montre un signal modulé QPSK pour une séquence binaire donnée.

Modulateur QPSK

La figure 4.5 montre le modulateur QPSK. Les différents signaux apparaissant sur cette figure sont également présents à la figure 4.4.

Démodulateur QPSK

Le signal modulé QPSK correspond à la modulation en quadrature de deux signaux numériques en bande de base. La première phase de la démodulation consiste donc à retrouver les composantes en phase et en quadrature du signal modulé. Les deux signaux numériques en bande de base obtenus sont ensuite démodulés grâce au filtre adapté (un pour chaque signal) et recombinaés pour former la séquence binaire de départ. Le schéma du démodulateur QPSK est repris à la figure 4.6.

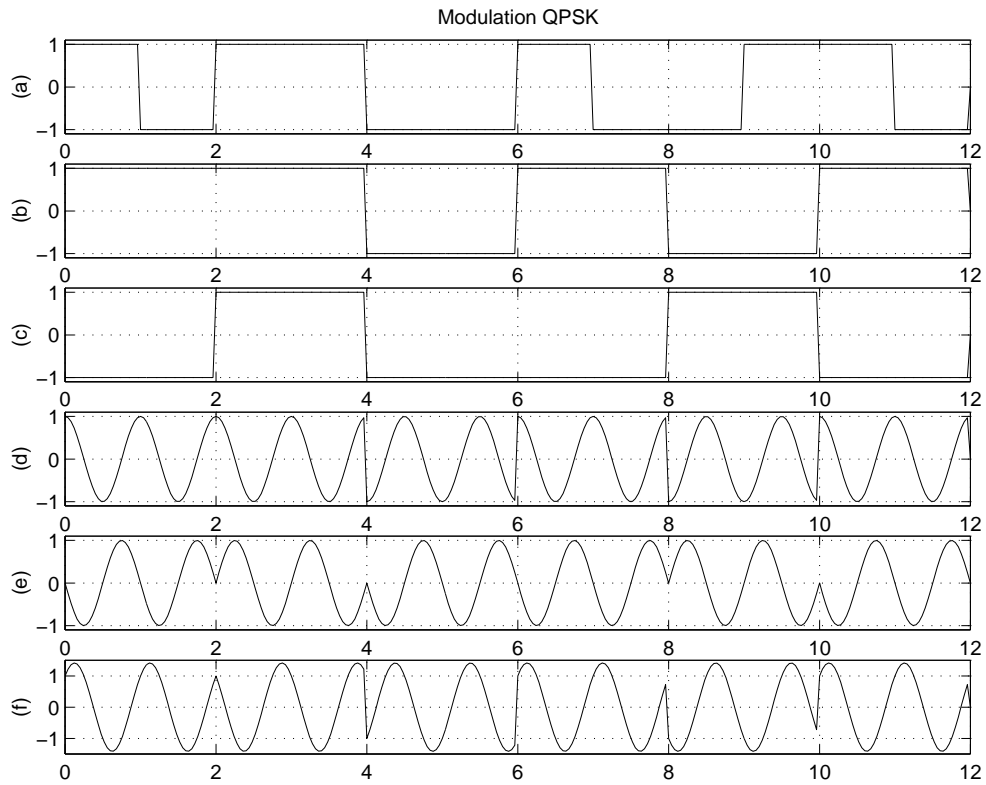


FIG. 4.4 – Illustration de la modulation QPSK : (a) séquence binaire $I(t)$, (b) signal $s_I(t)$, (c) signal $s_Q(t)$, (d) $s_I(t) \cos(2\pi f_c t)$, (e) $s_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$ et (f) signal modulé $s(t)$.

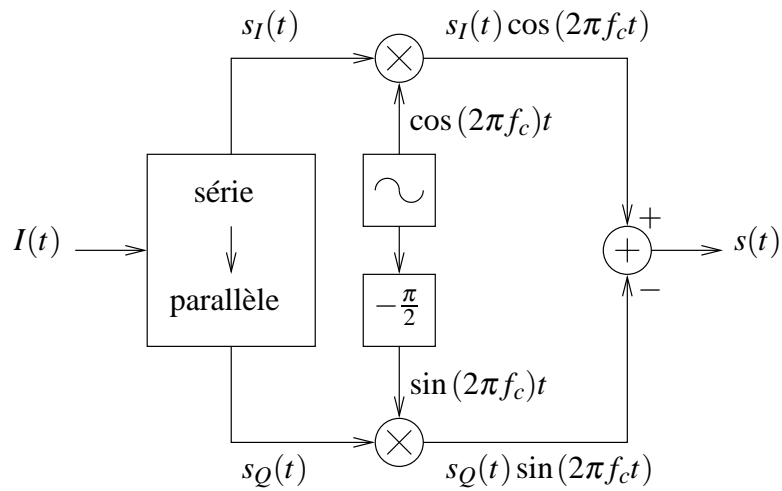


FIG. 4.5 – Modulateur QPSK.

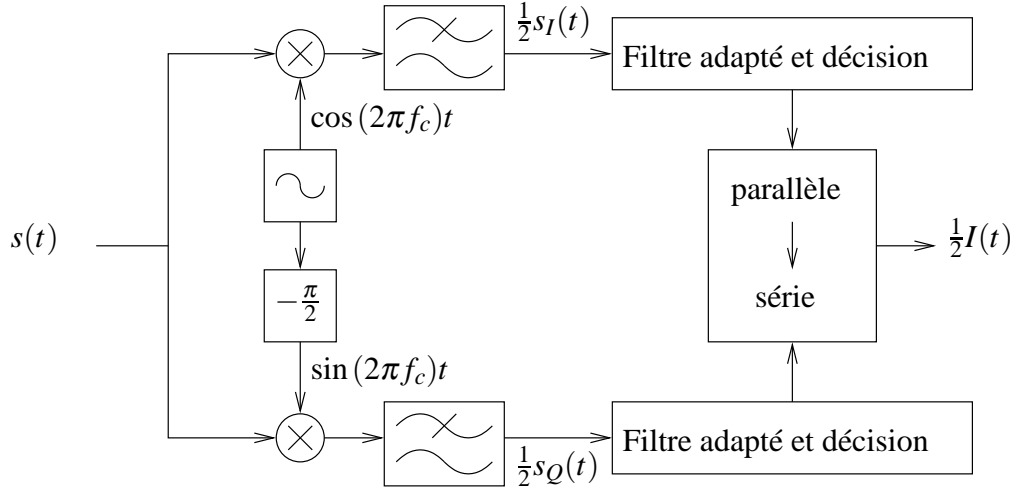


FIG. 4.6 – Démodulateur QPSK.

Densité spectrale de puissance

L'enveloppe complexe du signal modulé est donnée par

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k g(t - kT) \quad (4.60)$$

où le signal de mise en forme $g(t)$ et la variable aléatoire D_k valent respectivement

$$g(t) = \text{rect}_{[0, 2T_b]}(t) \quad (4.61)$$

$$D_k = \left(\pm \frac{A}{\sqrt{2}}, \pm \frac{A}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.62)$$

Nous faisons à nouveau l'hypothèse que les quatre valeurs possibles pour D_k sont équiprobables. La moyenne μ_D est donc nulle et la variance est égale à $\sigma_D^2 = E \{ \|D_k\|^2 \} = A^2$. Il vient, après calcul de la transformée de FOURIER du signal de mise en forme,

$$\gamma_{e_s}(f) = 2A^2 T_b \text{sinc}^2(2fT_b) \quad (4.63)$$

La densité spectrale de puissance d'un signal modulé en QPSK s'exprime finalement par

$$\gamma_s(f) = \frac{A^2 T_b}{2} \{ \text{sinc}^2[(f - f_c) 2T_b] + \text{sinc}^2[(f + f_c) 2T_b] \} \quad (4.64)$$

et est identique à celle de la modulation BPSK pour un débit binaire double.

4.4 Modulations linéaires à décalage (Offset)

4.4.1 Description

Les modulations linéaires à décalage présentent la particularité que la variable aléatoire D_k est purement réelle ($D_k = A_k$) et que la phase θ_k de l'expression (4.5) est égale à $2\pi f_c kT + k\frac{\pi}{2}$. L'expression de l'enveloppe complexe du signal modulé se simplifie donc en

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT) e^{jk\frac{\pi}{2}} \quad (4.65)$$

Bien que la variable aléatoire A_k soit réelle, l'enveloppe complexe $e_s(t)$ est bel et bien un signal à valeurs complexes.

Mettons-nous à présent dans le cas où $T = T_b$, la durée de l'impulsion de mise en forme $g(t)$ n'étant pas encore fixée. Le signal modulé prend la forme

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) \cos\left(2\pi f_c t + \varphi_c + k\frac{\pi}{2}\right) \quad (4.66)$$

$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right] \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (4.67)$$

$$- \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right] \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (4.68)$$

En tenant compte du fait que $\cos(k\pi/2) = 0$ pour k impair et que $\sin(k\pi/2) = 0$ pour k pair, les composantes en phase et en quadrature peuvent s'exprimer par

$$s_I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad (4.69)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{2k} (-1)^k g(t - 2kT_b) \quad (4.70)$$

et

$$s_Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad (4.71)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{2k+1} (-1)^k g(t - (2k+1)T_b) \quad (4.72)$$

On voit que, par rapport aux modulations linéaires classiques, les séquences $s_I(t)$ et $s_Q(t)$ sont décalées entre elles de la durée d'un bit T_b , d'où le nom de modulation à *décalage*.

4.4.2 Calcul de la densité spectrale de puissance

Dans le cas des modulations linéaires à décalage, l'expression (4.65) de l'enveloppe complexe ne permet pas un calcul direct de sa densité spectrale de puissance, en raison de la présence du facteur $e^{jk\frac{\pi}{2}}$. Afin de résoudre ce problème, nous allons introduire une nouvelle fréquence porteuse f'_c et une nouvelle enveloppe complexe $v(t)$ pour laquelle le calcul de la densité spectrale de puissance sera possible :

$$s(t) = \operatorname{Re}\left(e_s(t) e^{j(2\pi f_c t + \varphi_c)}\right) \quad (4.73)$$

$$= \operatorname{Re}\left(e_s(t) e^{-j2\pi \frac{t}{4T_b}} e^{j\left(2\pi\left(f_c + \frac{1}{4T_b}\right)t + \varphi_c\right)}\right) \quad (4.74)$$

$$= \operatorname{Re}\left(v(t) e^{j(2\pi f'_c t + \varphi_c)}\right) \quad (4.75)$$

où nous avons posé

$$v(t) = e^{-j2\pi \frac{t}{4T_b}} e_s(t) \quad (4.76)$$

$$f'_c = f_c + \frac{1}{4T_b} \quad (4.77)$$

Si nous connaissons la densité spectrale de puissance du signal complexe $v(t)$, il est possible de calculer la densité spectrale de puissance du signal modulé par le biais de la formule

$$\gamma_s(f) = \frac{\gamma_v(f - f'_c) + \gamma_v^*(-f - f'_c)}{4} = \frac{\gamma_v\left(f - f_c - \frac{1}{4T_b}\right) + \gamma_v^*\left(-f - f_c - \frac{1}{4T_b}\right)}{4} \quad (4.78)$$

que nous avons démontrée précédemment. Nous allons à présent montrer que $v(t)$ peut se mettre sous la forme (4.24) pour laquelle nous sommes à même de calculer la densité spectrale de puissance. En fait,

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) e^{jk\frac{\pi}{2}} e^{-j2\pi\frac{t}{4T_b}} \quad (4.79)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) e^{-j\frac{\pi}{2T_b}(t - kT_b)} \quad (4.80)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k h(t - kT_b) \quad (4.81)$$

où nous avons posé

$$h(t) = g(t) e^{-j\frac{\pi t}{2T_b}} \quad (4.82)$$

Le signal $h(t)$ correspond à un nouveau signal de mise en forme dont la transformée de FOURIER se déduit du signal $g(t)$

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{G}\left(f + \frac{1}{4T_b}\right) \quad (4.83)$$

La densité spectrale de puissance du signal $v(t)$ s'obtient alors en adaptant la formule (4.27)

$$\gamma_v(f) = \frac{\|\mathcal{H}(f)\|^2}{T_b} \left[\sigma_A^2 + \mu_A^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_b} \delta\left(f - \frac{m}{T_b}\right) \right] \quad (4.84)$$

Nous avons à présent à notre disposition tous les outils nécessaires au calcul de la densité spectrale de puissance de signaux numériques linéaires à décalage.

4.4.3 Modulation en quadrature de phase à décalage (Offset Quadrature Phase Shift Keying)

Description

La modulation OQPSK est une version “à décalage” de la modulation QPSK. C'est donc une modulation PSK-4 et le diagramme de constellations (figure 4.2) reste d'application. La différence essentielle réside dans la formation des composantes en phase et en quadrature du signal modulé.

Considérons une source binaire fournissant le train d'impulsions suivant

$$I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k \delta(t - kT_b) \quad (4.85)$$

où $I_k = +1$ représente l'information binaire 1 et $I_k = -1$ correspond à l'information binaire 0. Le débit binaire est égal à $R_b = 1/T_b$. À partir de la séquence $I(t)$, les composantes en phase $s_I(t)$ et en

quadrature $s_Q(t)$ sont formées de la manière suivante

$$\begin{aligned} s_I(t) &= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k} g(t - 2kT_b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{2k} (-1)^k g(t - 2kT_b) \\ s_Q(t) &= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k+1} g(t - (2k+1)T_b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{2k+1} (-1)^k g(t - (2k+1)T_b) \end{aligned} \quad (4.86)$$

où $g(t)$ est une impulsion de mise en forme de durée $T = 2T_b$, $A_{2k} = (-1)^k I_{2k} \frac{A}{\sqrt{2}}$ et $A_{2k+1} = (-1)^k I_{2k+1} \frac{A}{\sqrt{2}}$, $\forall k$. Ces deux séquences correspondent respectivement aux bits pairs et impairs de la séquence de départ. La composante en phase $s_I(t)$ est la même pour la modulation OQPSK et la modulation QPSK. Par contre, la composante en quadrature $s_Q(t)$ est décalée de T_b par rapport à la modulation QPSK. La figure 4.7 illustre la formation de ces séquences pour un signal de mise en forme égal à

$$g(t) = \text{rect}_{[0,T]}(t) = \text{rect}_{[0,2T_b]}(t) \quad (4.87)$$

qui correspond à modulation OQPSK classique.

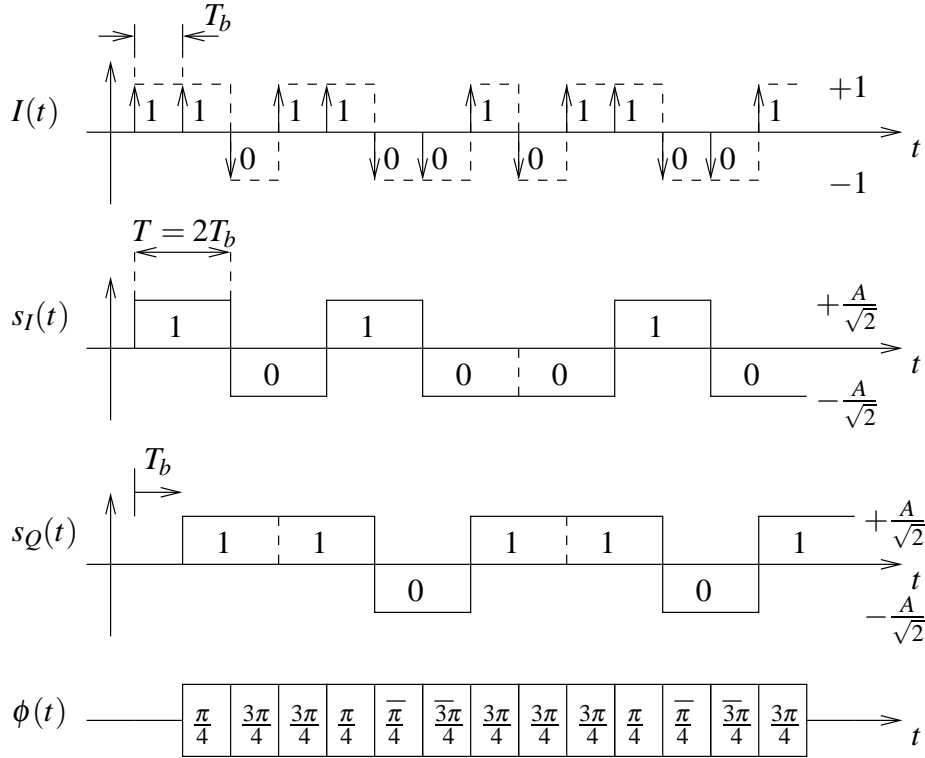


FIG. 4.7 – Formation des composantes en phase et en quadrature pour la modulation OQPSK (avec une mise en forme par un signal rectangulaire).

Il est maintenant nettement moins évident de calculer l'enveloppe et la phase instantanée du signal modulé, cela à cause du “chevauchement” entre les impulsions de $s_I(t)$ et $s_Q(t)$. En toute généralité, nous pouvons écrire

$$a(t) = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)} \quad (4.88)$$

pour l'enveloppe instantanée et

$$\phi(t) = \arctan \left[\frac{s_Q(t)}{s_I(t)} \right] \quad (4.89)$$

pour la phase instantanée. En observant la figure 4.7, nous pouvons déduire que l'enveloppe du signal modulé est constante, sauf peut-être aux transitions des signaux $s_I(t)$ et $s_Q(t)$, c'est-à-dire toutes les T_b secondes. La phase, quant à elle, varie toujours par paliers ; pour s'en convaincre, il suffit à nouveau de se référer au plan de constellations de la figure 4.2. Deux différences essentielles sont cependant à remarquer. Tout d'abord, la phase ne change plus de valeur toutes les $T = 2T_b$ secondes comme dans la modulation QPSK mais bien toutes les T_b secondes. De plus, il n'y a plus, à chaque transition de la phase, qu'un saut de $\pm \frac{\pi}{2}$. Le fait de décaler la séquence $s_I(t)$ a fait disparaître les transitions de $\pm \pi$. En effet, dans la modulation QPSK, les transitions de $\pm \pi$ étaient dues aux transitions simultanées des signaux $s_I(t)$ et $s_Q(t)$. Dans la modulation OQPSK, ces deux signaux ne varient jamais en même temps. Les transitions possibles sont représentées en pointillés sur la figure 4.8. Celles-ci ne se faisant plus qu'horizontalement ou verticalement, l'enveloppe du signal modulé ne peut donc plus s'annuler, ce qui est un gros avantage de la modulation OQPSK par rapport à la modulation QPSK.

La figure 4.9 montre un signal modulé OQPSK pour une séquence binaire donnée.

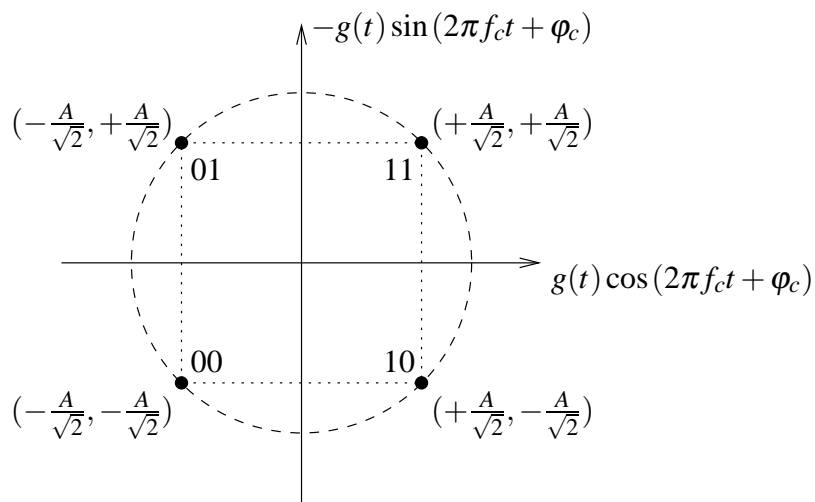


FIG. 4.8 – Diagramme de constellations pour la modulation OQPSK.

Modulateur et démodulateur OQPSK

Les circuits de modulation et de démodulation pour l'OQPSK sont tout à fait semblables à ceux utilisés pour le QPSK, mis à part un délai de T_b qu'il faut introduire dans la branche en quadrature des circuits.

Densité spectrale de puissance

L'enveloppe complexe du signal modulé est donnée par

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) e^{jk\frac{\pi}{2}} \quad (4.90)$$

où le signal de mise en forme $g(t)$ et la variable aléatoire A_k valent respectivement

$$g(t) = \text{rect}_{[0, 2T_b]}(t) \quad (4.91)$$

$$A_k \in \left\{ +\frac{A}{\sqrt{2}}, -\frac{A}{\sqrt{2}} \right\} \quad (4.92)$$

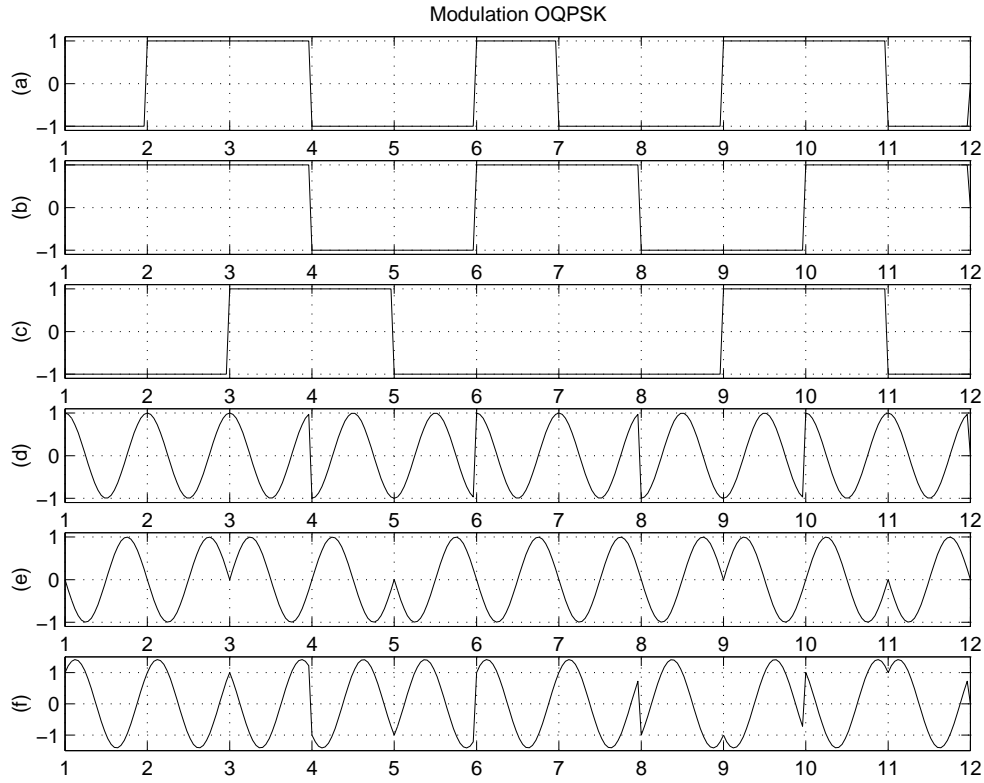


FIG. 4.9 – Illustration de la modulation OQPSK : (a) séquence binaire $I(t)$, (b) $s_I(t)$, (c) $s_Q(t)$, (d) $s_I(t) \cos(2\pi f_c t)$, (e) $s_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$ et (f) signal modulé $s(t)$.

Nous faisons à nouveau l'hypothèse que les deux valeurs possibles pour A_k sont équiprobables. La moyenne μ_A est donc nulle et la variance est égale à $\sigma_A^2 = E\{A_k^2\} = \frac{A^2}{2}$. Il vient après calcul de la transformée de FOURIER du signal de mise en forme $\mathcal{H}(f) = \mathcal{G}\left(f + \frac{1}{4T_b}\right)$,

$$\gamma_v(f) = 2A^2 T_b \operatorname{sinc}^2 \left[\left(f + \frac{1}{4T_b} \right) 2T_b \right] \quad (4.93)$$

Conformément à la relation (4.78), la densité spectrale de puissance d'un signal modulé en OQPSK s'exprime donc finalement par

$$\gamma_s(f) = \frac{A^2 T_b}{2} \{ \operatorname{sinc}^2 [(f - f_c) 2T_b] + \operatorname{sinc}^2 [(f + f_c) 2T_b] \} \quad (4.94)$$

et est exactement identique à celle d'un signal modulé QPSK.

4.4.4 Modulation à saut de phase minimum (Minimum Shift Keying)

Bien que plus avantageuse que la modulation QPSK, la modulation OQPSK présente encore un inconvénient : des discontinuités de phase qui entraînent une bande passante importante. La modulation à saut de phase minimum (*MSK*) permet de supprimer ces discontinuités de phase. Celle-ci présente les mêmes particularités que la modulation OQPSK sauf que les sauts de phase se font de manière continue pendant la durée d'un bit T_b de telle sorte que la phase instantanée du signal modulé est une fonction continue du temps.

Description

La caractéristique qui différencie la modulation MSK de la modulation OQPSK est le signal de mise en forme qui prend maintenant la forme

$$g(t) = \text{rect}_{[0, 2T_b]}(t) \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \quad (4.95)$$

Les séquences $s_I(t)$ et $s_Q(t)$ sont formées exactement de la même manière que pour la modulation OQPSK. La composante en phase $s_I(t)$ s'écrit sous la forme

$$s_I(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k} \text{rect}_{[0, 2T_b]}(t - 2kT_b) \sin\left[\frac{\pi(t - 2kT_b)}{2T_b}\right] \quad (4.96)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A I_{2k} (-1)^k \text{rect}_{[0, 2T_b]}(t - 2kT_b) \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \quad (4.97)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi t}{2T_b} - \frac{\pi}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{2k} \text{rect}_{[0, 2T_b]}(t - 2kT_b) \quad (4.98)$$

où nous avons utilisé le fait que $\sin(a) = \cos(a - \frac{\pi}{2})$ et défini $A_{2k} = A I_{2k} (-1)^k$. Le signal $s_I(t)$ peut être vu comme un signal du type NRZ multiplié par une cosinusoïde. Un développement similaire donne pour la composante en quadrature de phase

$$s_Q(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b} - \frac{\pi}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{2k+1} \text{rect}_{[0, 2T_b]}(t - 2kT_b) \quad (4.99)$$

où $A_{2k+1} = A I_{2k+1} (-1)^k$. Ces deux expressions vont nous permettre de déterminer l'enveloppe instantanée et la variation de phase instantanée du signal modulé. L'enveloppe est donnée par

$$a(t) = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)} \quad (4.100)$$

$$= \sqrt{A^2 \cos^2\left(\frac{\pi t}{2T_b} - \frac{\pi}{2}\right) + A^2 \sin^2\left(\frac{\pi t}{2T_b} - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (4.101)$$

$$= A \quad (4.102)$$

L'enveloppe du signal modulé est donc constante et égale à A . La phase instantanée peut s'exprimer par

$$\varphi(t) = \tan^{-1} \left[\frac{s_Q(t)}{s_I(t)} \right] \quad (4.103)$$

$$= \tan^{-1} \left[\tan\left(\frac{\pi t}{2T_b} - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{2k+1} \text{rect}_{[0, 2T_b]}(t - (2k+1)T_b)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{2k} \text{rect}_{[0, 2T_b]}(t - 2kT_b)} \right] \quad (4.104)$$

Si maintenant, on observe l'évolution de la phase pendant un intervalle de temps T_b d'un bit, la fraction dans l'argument de la fonction \tan^{-1} vaut ± 1 et la variation de la phase vaut

$$\Delta\varphi(t) = \pm \frac{\pi t}{2T_b} \quad (4.105)$$

La phase varie donc linéairement de $\frac{\pi}{2}$ sur la durée de T_b secondes. Contrairement aux modulations vues jusqu'ici, la modulation MSK présente des sauts de phase qui se réalisent en "douceur". Par

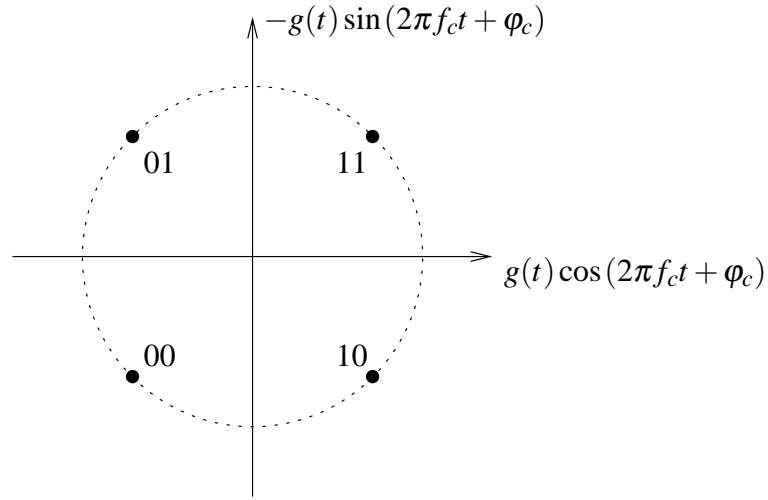


FIG. 4.10 – Diagramme de constellation pour la modulation MSK.

exemple, pour passer de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{3\pi}{4}$, la phase prend T_b secondes, tandis que l'enveloppe reste constante au cours du temps. La figure 4.10 montre en pointillés les transitions possibles pour la modulation MSK.

On peut également représenter l'évolution de la phase par ce que l'on appelle le *treillis de phase*. Il représente toutes les variations possibles de $\varphi(t)$. La figure 4.11 montre le treillis de phase pour la modulation MSK. La phase est maintenant une fonction continue du temps. On peut espérer avoir une bande passante moins importante que pour la modulation QPSK ou OQPSK.

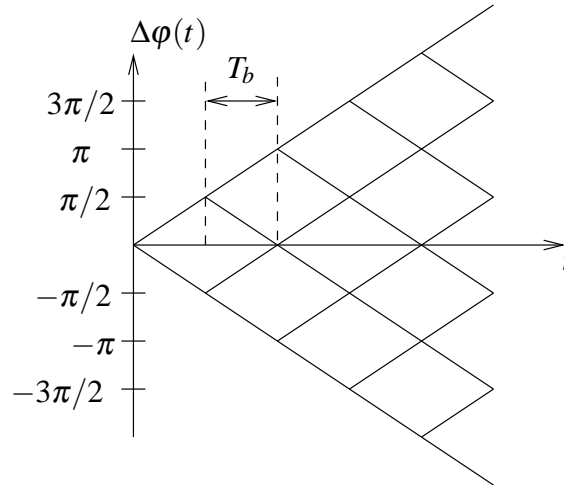


FIG. 4.11 – Treillis de phase pour la modulation MSK.

La figure 4.12 montre un signal modulé MSK pour une séquence binaire donnée. En observant le signal modulé, on peut également l'interpréter comme une modulation de fréquence. En effet, en écrivant

$$s(t) = a(t) \cos [2\pi f_c t + \varphi(t)] \quad (4.106)$$

et considérant une période T_b , nous obtenons

$$s(t) = A \cos \left(2\pi f_c t \pm \frac{\pi t}{2T_b} \right) \quad (4.107)$$

$$= A \cos \left[2\pi \left(f_c \pm \frac{1}{4T_b} \right) t \right] \quad (4.108)$$

qui représente bien une modulation de fréquence dont l'excursion est égale à $\Delta f = 2\frac{1}{4T_b} = \frac{1}{2T_b}$.

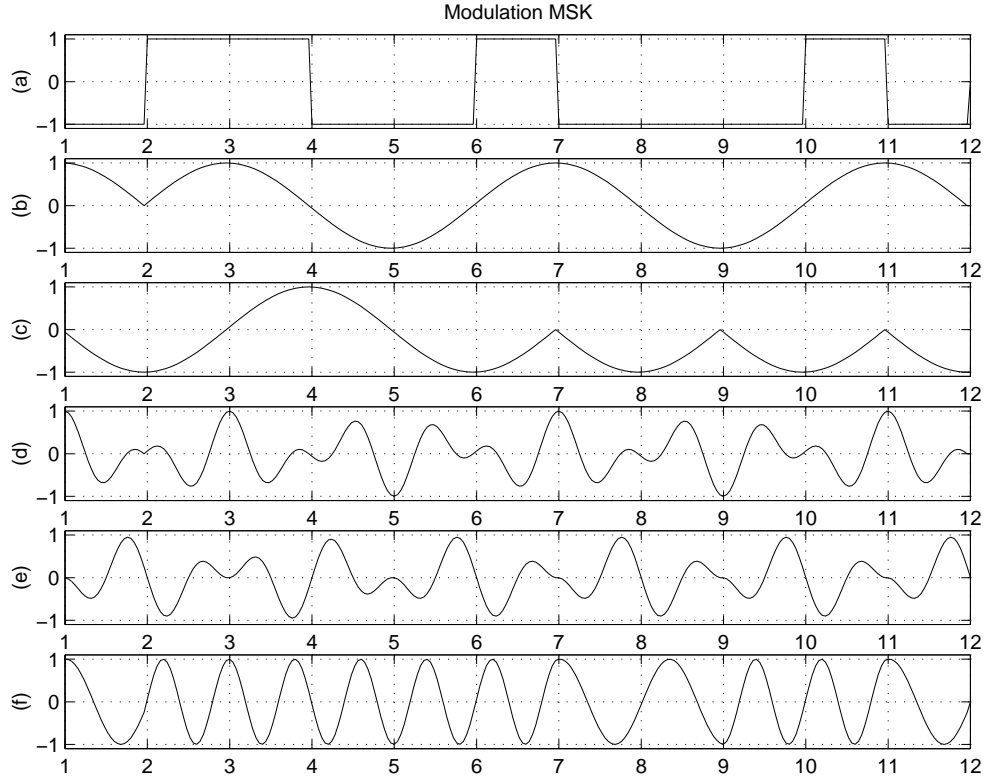


FIG. 4.12 – Illustration de la modulation MSK : (a) séquence binaire $I(t)$, (b) $s_I(t)$, (c) $s_Q(t)$, (d) $s_I(t) \cos(2\pi f_c t)$, (e) $s_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$ et (f) signal modulé $s(t)$.

Densité spectrale de puissance

L'enveloppe complexe du signal modulé est à nouveau donnée par

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) e^{jk\frac{\pi}{2}} \quad (4.109)$$

où le signal de mise en forme $g(t)$ et la variable aléatoire A_k valent respectivement

$$g(t) = \text{rect}_{[0, 2T_b]}(t) \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \quad (4.110)$$

$$A_k \in \{+A, -A\} \quad (4.111)$$

Nous faisons à nouveau l'hypothèse que les deux valeurs possibles pour A_k sont équiprobables. La moyenne μ_A est donc nulle et la variance est égale à $\sigma_A^2 = E\{A_k^2\} = A^2$. Il vient après calcul de la transformée de FOURIER du signal de mise en forme $\mathcal{H}(f) = \mathcal{G}\left(f + \frac{1}{4T_b}\right)$,

$$\gamma_v(f) = \frac{16A^2T_b}{\pi^2} \left\{ \frac{\cos\left[2\pi\left(f + \frac{1}{4T_b}\right)T_b\right]}{1 - 16\left(f + \frac{1}{4T_b}\right)^2 T_b^2} \right\}^2 \quad (4.112)$$

La densité spectrale de puissance d'un signal modulé en MSK s'exprime donc finalement par

$$\gamma_s(f) = \frac{4A^2T_b}{\pi} \left\{ \left(\frac{\cos[2\pi(f-f_c)T_b]}{1-16(f-f_c)^2T_b^2} \right)^2 + \left(\frac{\cos[2\pi(f+f_c)T_b]}{1-16(f+f_c)^2T_b^2} \right)^2 \right\} \quad (4.113)$$

Contrairement à la densité spectrale de puissance de la modulation OQPSK qui décroît en $1/f^2$, la densité spectrale de la modulation MSK décroît en $1/f^4$, ce qui fournit donc un gain en bande passante. La figure 4.13 permet de comparer les densités spectrales de puissance des modulation BPSK, OQPSK (\equiv QPSK) et MSK pour $R_b = 1/T_b = 1$ [b/s]. Nous voyons que la décroissance en $1/f^4$ est accompagnée d'un élargissement du lobe principal par rapport à la modulation OQPSK.

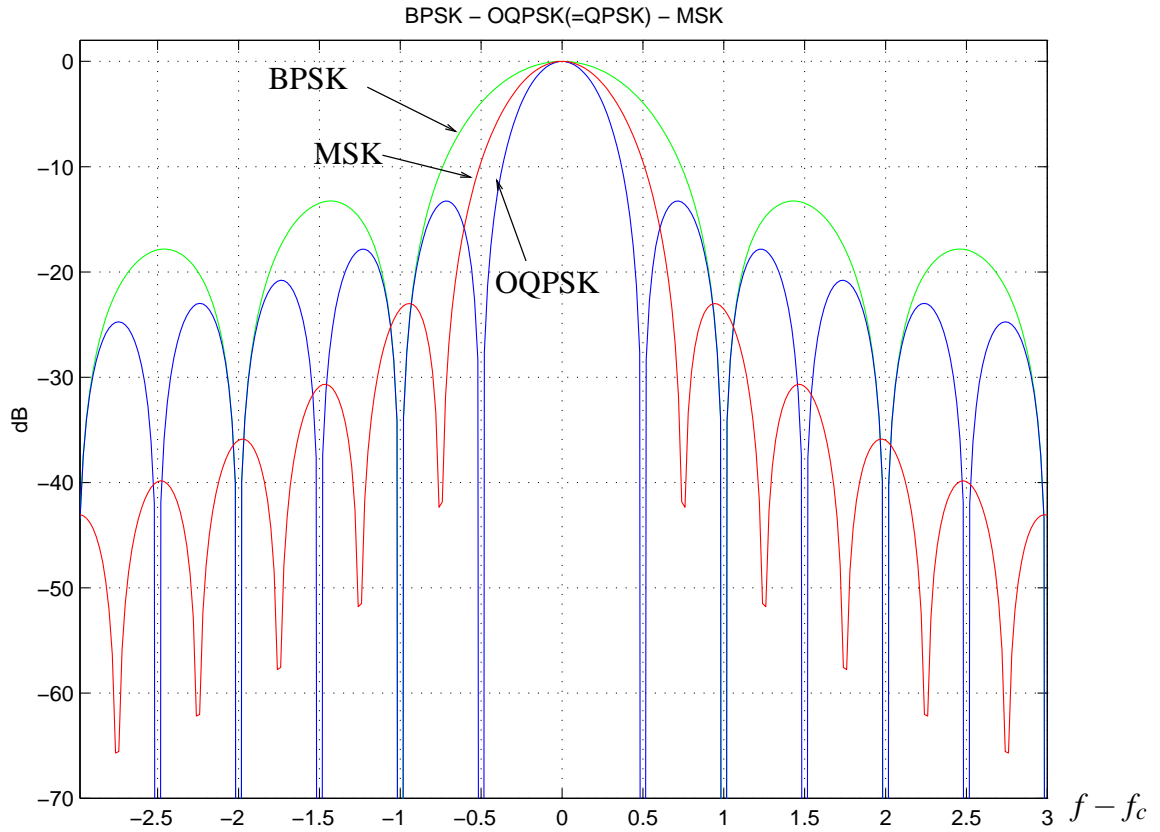


FIG. 4.13 – Comparaison des densités spectrales de puissance.

La modulation utilisée pour la transmission GSM est une variante de la MSK ; il s'agit d'une technique appelée Gaussian Minimum Shift Keying (GMSK) pour laquelle l'onde de mise en forme est une gaussienne.

Chapitre 5

Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symboles

Dans un canal de communication, une source importante d'erreurs est la présence de bruit sur le canal de transmission ; cette question a déjà été largement abordée précédemment. Nous allons à présent nous intéresser à une autre source de distorsion, appelée *interférence inter-symboles* qui apparaît, pour des communications numériques, lorsque le canal de transmission est *dispersif* (effet de la bande passante finie du canal).

Prenons le cas d'une transmission par mise en forme NRZ. On sait que la densité spectrale du signal NRZ occupe tout le spectre, malgré que la décroissance de la norme en fonction de la fréquence soit significative. Or, il est rare qu'un système soit à bande passante infinie ou que le canal ait une transmission de canal idéal sur la largeur de bande considérée. En conséquence, le signal NRZ subit des distorsions subséquentes au passage dans le canal. Ces distorsions se traduisent inéluctablement par un recouvrement entre symboles successifs.

Pour la facilité des développements, nous nous limitons à une transmission binaire en bande de base.

5.1 Définition de l'interférence inter-symboles

Considérons un système de modulation d'impulsions PAM (Pulse Amplitude Modulation) en bande de base dont le schéma général est représenté à la figure 5.1. L'information à transmettre est la séquence binaire $\{b_k\}$ dont chaque symbole (1 ou 0) est de durée T_b . Le modulateur va mettre en forme la séquence $\{b_k\}$, grâce à l'impulsion de mise en forme $g_E(t)$, et fournir le signal

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g_E(t - kT_b) \quad (5.1)$$

où les amplitudes A_k (représentant l'information binaire transmise à l'instant $t = kT_b$) sont liées à la séquence $\{b_k\}$ par la relation

$$A_k = \begin{cases} +1 & \text{si } b_k = 1 \\ -1 & \text{si } b_k = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Le signal transmis au travers du canal est donc $s(t)$. Celui-ci va être modifié par convolution avec la réponse impulsionnelle $h(t)$ du canal de transmission. De plus, un bruit (supposé blanc et gaussien) vient s'ajouter au signal dans le canal. Le signal reçu, noté $x(t)$, est ensuite filtré par un filtre de réception, de réponse impulsionnelle $g_R(t)$. La sortie de ce filtre, notée $y(t)$, est échantillonnée au rythme de l'émetteur, c'est-à-dire toutes les T_b secondes et est synchronisé avec celui-ci (les instants

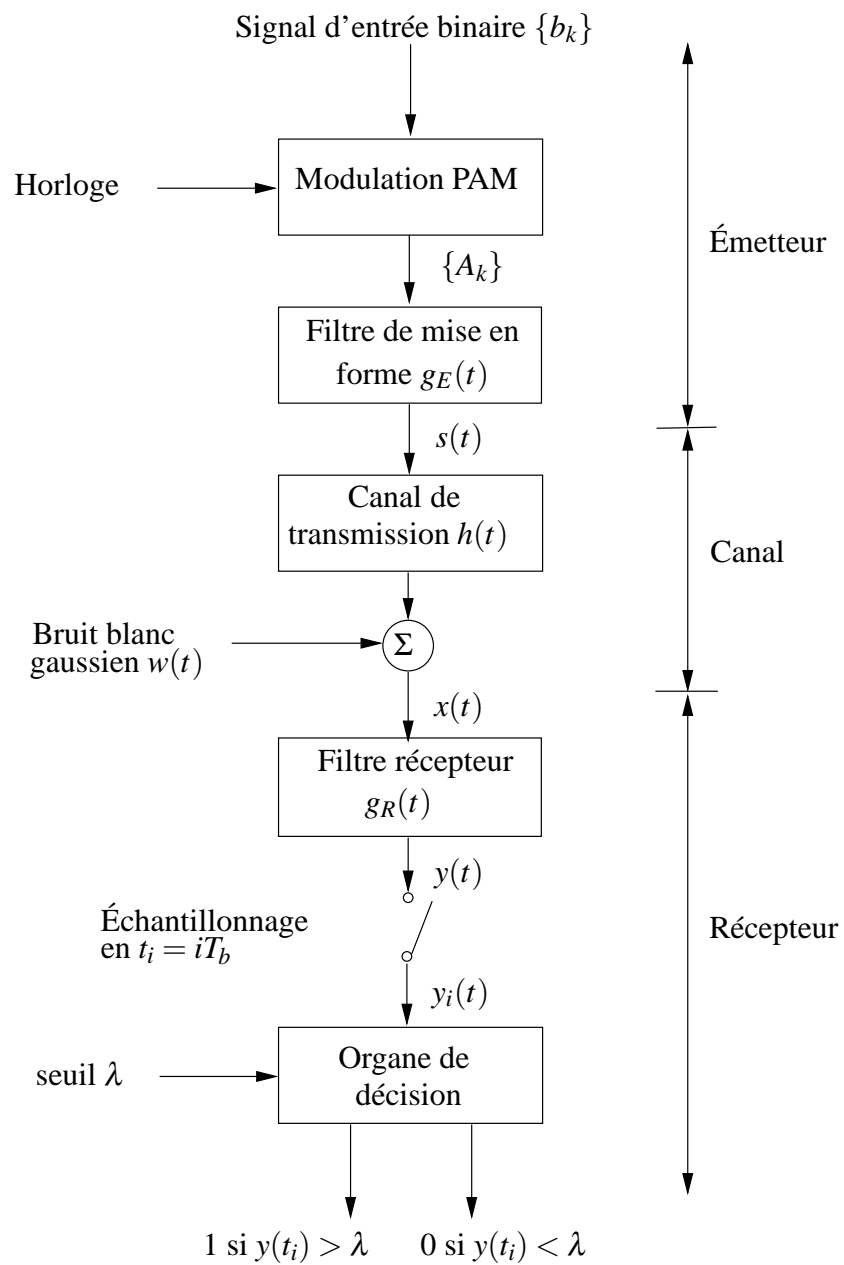


FIG. 5.1 – Schéma général de la transmission en bande de base

d'échantillonnage sont déterminés par une horloge qui est extraite du signal $y(t)$). Finalement la séquence d'échantillons ainsi obtenue est utilisée pour reconstruire la séquence originale $\{b_k\}$ au moyen d'un organe de décision. L'amplitude de chaque échantillon est comparée à un seuil λ .

La sortie du filtre de réception peut s'écrire sous la forme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - kT_b) \otimes g_E(t) \otimes h(t) \otimes g_R(t) + w(t) \otimes g_R(t) \quad (5.3)$$

où le symbole \otimes est une convolution. En prenant les notations suivantes

$$\mu p(t) = g_E(t) \otimes h(t) \otimes g_R(t) \quad (5.4)$$

$$n(t) = w(t) \otimes g_R(t) \quad (5.5)$$

où μ est un facteur d'échelle constant et $\mu p(t)$ est le résultat du passage du signal de mise en forme $g_E(t)$ au travers des deux filtres $h(t)$ et $g_R(t)$ caractérisant respectivement le canal et le filtre de réception. Le terme $n(t)$ est le résidu du bruit additif $w(t)$ ajouté par le canal, filtré par le filtre de réception. Il représente donc toujours un bruit blanc gaussien car il est passé au travers d'un filtre linéaire. En général, $w(t)$ est modélisé comme un bruit blanc additif gaussien de moyenne nulle. On obtient finalement

$$y(t) = \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - kT_b) + n(t) \quad (5.6)$$

Cette formule montre que le train d'impulsions n'est plus rectangulaire. Le facteur d'échelle μ est choisi de telle sorte que le signal $p(t)$ soit normalisé, c'est-à-dire

$$p(0) = 1 \quad (5.7)$$

Cette relation justifie l'utilisation de μ comme facteur d'échelle pour tenir compte des changements de l'amplitude du signal lors de son passage à travers le système. De plus, cette relation représente une contrainte mathématique et n'a aucune signification physique. Avant de poursuivre, il est important de remarquer que, pour être rigoureux, il faudrait introduire un délai t_0 dans l'argument de $p(t - kT_b)$ afin de représenter l'effet du délai de la transmission au travers du système. Cependant, pour simplifier l'exposé, nous choisissons de prendre ce délai égal à zéro, et cela sans perdre en généralité.

Vu qu'une convolution dans le domaine temporel équivaut à un produit dans le domaine fréquentiel, nous déduisons de la relation 5.4 que

$$\mu \mathcal{P}(f) = \mathcal{G}_E(f) \mathcal{H}(f) \mathcal{G}_R(f) \quad (5.8)$$

Le signal $y(t)$ à la sortie du filtre de réception est échantillonné aux instants $t_i = iT_b$ (il est intéressant de rappeler que l'échantillonnage se fait à la fin de la période, ceci résultant de la théorie de du filtre adapté), ce qui fournit les échantillons

$$y(t_i) = \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p((i - k)T_b) + n(t_i) \quad (5.9)$$

$$= \mu A_i + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq i}}^{+\infty} A_k p((i - k)T_b) + n(t_i) \quad (5.10)$$

Le premier terme μA_i représente la contribution du i -ème bit transmis et donc le symbole d'intérêt. Le second terme représente l'effet résiduel de tous les autres bits transmis sur le i -ème bit, qu'ils aient

été transmis avant ou après le i -ème bit. Cet effet résiduel est appelé *interférence inter-symboles*. L'importance de cet effet dépend de l'étalement de $p(t)$. On peut déjà remarquer que pour minimiser le terme d'interférence inter-symboles, il faudra choisir une forme adéquate pour la fonction $p(t)$ de manière à éliminer ce second terme. Le dernier terme de $n(t_i)$ est le bruit $n(t)$ échantillonné à l'instant t_i .

En l'absence d'interférence inter-symboles et de bruit, l'équation 5.10 se réduit à

$$y(t_i) = \mu A_i \quad (5.11)$$

ce qui montre bien que, sous ces conditions idéales, le i -ème bit transmis est décodé correctement. La présence inévitable d'interférence inter-symboles et de bruit dans le système introduit des erreurs au niveau de l'organe de décision. Dès lors, lors la conception du filtre de mise en forme et du filtre de réception, l'objectif est de minimiser les effets de l'interférence inter-symboles et du bruit, aboutissant ainsi à un taux d'erreurs aussi faible que possible.

Il existe deux types de transmission :

- la transmission où le bruit est prépondérant, c'est le cas des communications satellite par exemple, pour lequel on privilégie le bon fonctionnement du filtre adapté,
- la transmission où le rapport signal sur bruit est important, comme pour le cas du réseau téléphonique par exemple, et dès lors le fonctionnement du système est essentiellement limité par l'interférence inter-symboles, et non par le bruit.

Dans l'étude qui suit, nous nous placerons dans le second cas et nous négligeons ainsi le terme $n(t)$ et nous nous focalisons sur la question de la réduction, voire de l'élimination de l'interférence inter-symboles.

5.2 Critère de NYQUIST

Le but poursuivi est, comme mentionné précédemment, de choisir la forme de $p(t)$ de manière à minimiser, voire éliminer, le terme d'interférence. Or, nous avons vu que $p(t)$ est liée à $g_E(t)$, $h(t)$ et $g_R(t)$. Cependant, en général, la fonction de transfert du canal de transmission $h(t)$ est fixée et il est donc impossible de la modifier pour minimiser l'interférence inter-symboles. Il reste cependant deux degrés de liberté : l'impulsion de mise en forme $g_E(t)$ et la réponse impulsionnelle du filtre de réception $g_R(t)$. Le terme d'interférence étant exprimé en fonction de l'impulsion $p(t)$, nous allons simplement déterminer une forme pour $p(t)$ telle que l'interférence s'annule complètement. Les fonctions $g_E(t)$ et $g_R(t)$ pourront ensuite être obtenues en exploitant l'équation 5.8.

Le décodeur extrait la séquence de coefficients A_k en échantillonnant la sortie du filtre $y(t)$ toutes les T_b secondes. Pour le i -ème bit, le décodage à interférence inter-symboles nulle survient si les contributions $A_k p(iT_b - kT_b)$ sont nulles pour $k \neq i$. Dès lors, il faut que l'impulsion $p(t)$ vérifie la condition

$$p(iT_b - kT_b) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \quad (5.12)$$

où $p(0) = 1$ par normalisation. Si $p(t)$ vérifie cette condition, il n'y a pas d'interférence inter-symboles et la réception est parfaite *en l'absence de bruit*. On constate déjà, intuitivement, qu'une fonction sinus cardinal permettrait de remplir cette condition.

Du point de vue de la synthèse du système, il est intéressant de reprendre la condition 5.12 dans le domaine fréquentiel. Comme la propriété que doit vérifier $p(t)$ est donnée en des points bien précis (au droit des échantillons), considérons la version échantillonnée de $p(t)$ représentée par la séquence

d'échantillons $\{p(mT_b)\}$ pour $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Le signal

$$p_s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p(mT_b) \delta(t - mT_b) \quad (5.13)$$

représente alors une version échantillonnée du signal $p(t)$. Par le théorème d'échantillonnage, il est facile de calculer la transformée de FOURIER du signal $p_s(t)$

$$\mathcal{P}_s(f) = f_b \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(f - mf_b) \quad (5.14)$$

où $f_b = 1/T_b$ est le débit binaire (ou *rythme*) exprimé en $[b/s]$. On remarque dès lors une répétition du spectre autour de tous les multiples entiers de la fréquence d'échantillonnage. La fonction $\mathcal{P}_s(f)$ peut encore s'écrire sous la forme

$$\mathcal{P}_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [p(mT_b) \delta(t - mT_b)] e^{-2\pi j f t} dt \quad (5.15)$$

mais vu que la somme se réduit au terme correspondant à $m = 0$, on peut encore écrire

$$\mathcal{P}_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(0) \delta(t) e^{-2\pi j f t} dt \quad (5.16)$$

$$= 1 \quad (5.17)$$

Il nous reste maintenant à combiner les équations et pour obtenir

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(f - mf_b) = T_b \quad (5.18)$$

Nous pouvons à présent énoncer le critère de NYQUIST pour une transmission en bande de base idéale en l'absence de bruit.

Proposition 22 [Critère de NYQUIST] *La transformée de FOURIER $\mathcal{P}(f)$ de l'impulsion $p(t)$ élimine totalement l'interférence inter-symboles pour des échantillons pris toutes les T_b secondes si elle vérifie la condition*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(f - mf_b) = T_b \quad (5.19)$$

Rappelons que la transformée $\mathcal{P}(f)$ dépend du système dans son ensemble ; cela inclut le filtre de mise en forme, la transmittance du canal et le filtre de réception.

5.2.1 Canal idéal de NYQUIST

La façon la plus simple de satisfaire l'équation 5.19 consiste à choisir pour $\mathcal{P}(f)$ une impulsion de forme rectangulaire

$$\mathcal{P}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} & -W < f < W \\ 0 & |f| > W \end{cases} \quad (5.20)$$

$$= \frac{1}{2W} \text{rect}_{[-W, +W]}(f) \quad (5.21)$$

où la bande de base du système W est définie par

$$W = \frac{f_b}{2} = \frac{1}{2T_b} \quad (5.22)$$

La condition est donc bien satisfaite. Cette équation permet de dire qu'aucune fréquence nécessaire ne dépasse la moitié du débit binaire. On en déduit qu'une fonction $p(t)$ qui satisferait le critère de NYQUIST est, comme il avait été signalé précédemment, le sinus cardinal :

$$p(t) = \frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt} = \text{sinc}(2Wt) \quad (5.23)$$

Une telle fonction $p(t)$ (ou $\mathcal{P}(f)$) caractérise le canal idéal de NYQUIST. Les figures 5.2.(a) et 5.2.(b) montre les fonctions $p(t)$ et $\mathcal{P}(f)$. $p(t)$ peut dès lors être vue comme la réponse impulsionnelle d'un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure correspondant à W .

À la figure 5.2.(b), on voit également les différents instants d'échantillonnage. Il est clair que, si le signal reçu $y(t)$ est échantillonné aux instants $t = 0, \pm T_b, \pm 2T_b, \dots$, les impulsions $\mu p(t - iT_b)$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) n'interfèrent pas entre elles. Cette condition est illustrée à la figure 5.3 pour la séquence binaire 1011010. On constate dès lors qu'aux instants d'échantillonnage, tous les sinus cardinal relatif aux symboles perturbateurs sont nuls.

Il existe cependant des raisons pour lesquelles l'impulsion en sinus cardinal ne peut être utilisée en pratique :

1. elle nécessite que $\mathcal{P}(f)$ soit constante sur l'intervalle de fréquence $[-W, +W]$ et nulle partout ailleurs. Cela est pratiquement irréalisable en raison des transitions abruptes en $\pm W$ (un filtre passe-bas idéal n'est pas réalisable),
2. la fonction $p(t)$ décroît en $1/|t|$ pour $|t|$ élevé ; elle décroît donc très lentement, les sinus cardinal se répercuteront donc sur des échantillons lointains. Il y a dès lors très peu de marge d'erreur acceptable sur les instants d'échantillonnage car si on n'échantillonne pas tout à fait au bon moment, tous les sinus cardinaux sont non nuls, ce qui donne une erreur cumulée importante. Pour évaluer cet effet d'erreur d'échantillonnage, considérons que l'on échantillonne le signal $y(t)$ en $t = t_i + \Delta t$, où Δt est le décalage temporel. Pour la clarté, on suppose que $t_i = 0$. En l'absence de bruit, nous avons donc

$$y(\Delta t) = \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(\Delta t - kT_b) \quad (5.24)$$

$$= \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \frac{\sin[2\pi W(\Delta t - kT_b)]}{2\pi W(\Delta t - kT_b)} \quad (5.25)$$

Sachant que

$$\sin[2\pi W(\Delta t - kT_b)] = \sin(2\pi W\Delta t) \cos(2\pi WkT_b) \quad (5.26)$$

$$= \cos(2\pi W\Delta t) \sin(2\pi WkT_b) \quad (5.27)$$

$$= (-1)^k \sin(2\pi W\Delta t) \quad (5.28)$$

Comme $2WT_b = 1$ par définition, nous pouvons réécrire

$$y(\Delta t) = \mu A_0 \text{sinc}(2W\Delta t) + \frac{\mu \sin(2\pi W\Delta t)}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} A_k \frac{(-1)^k}{(2W\Delta t - k)} \quad (5.29)$$

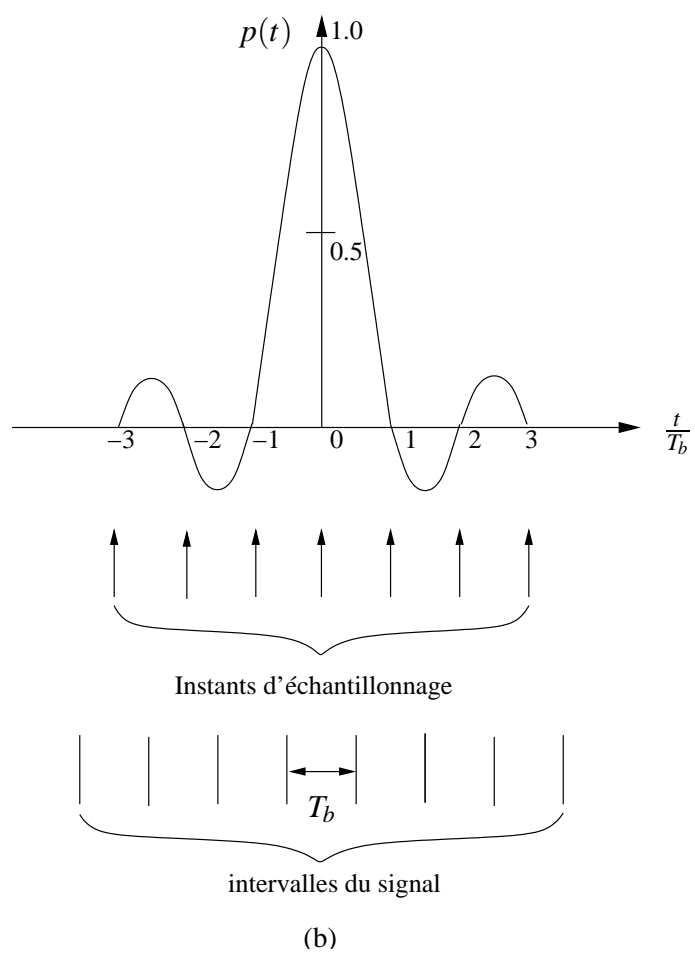
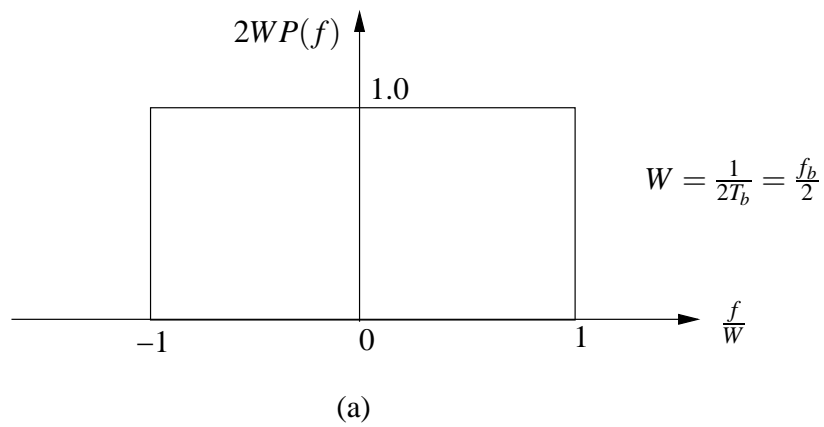


FIG. 5.2 – Canal idéal de Nyquist.

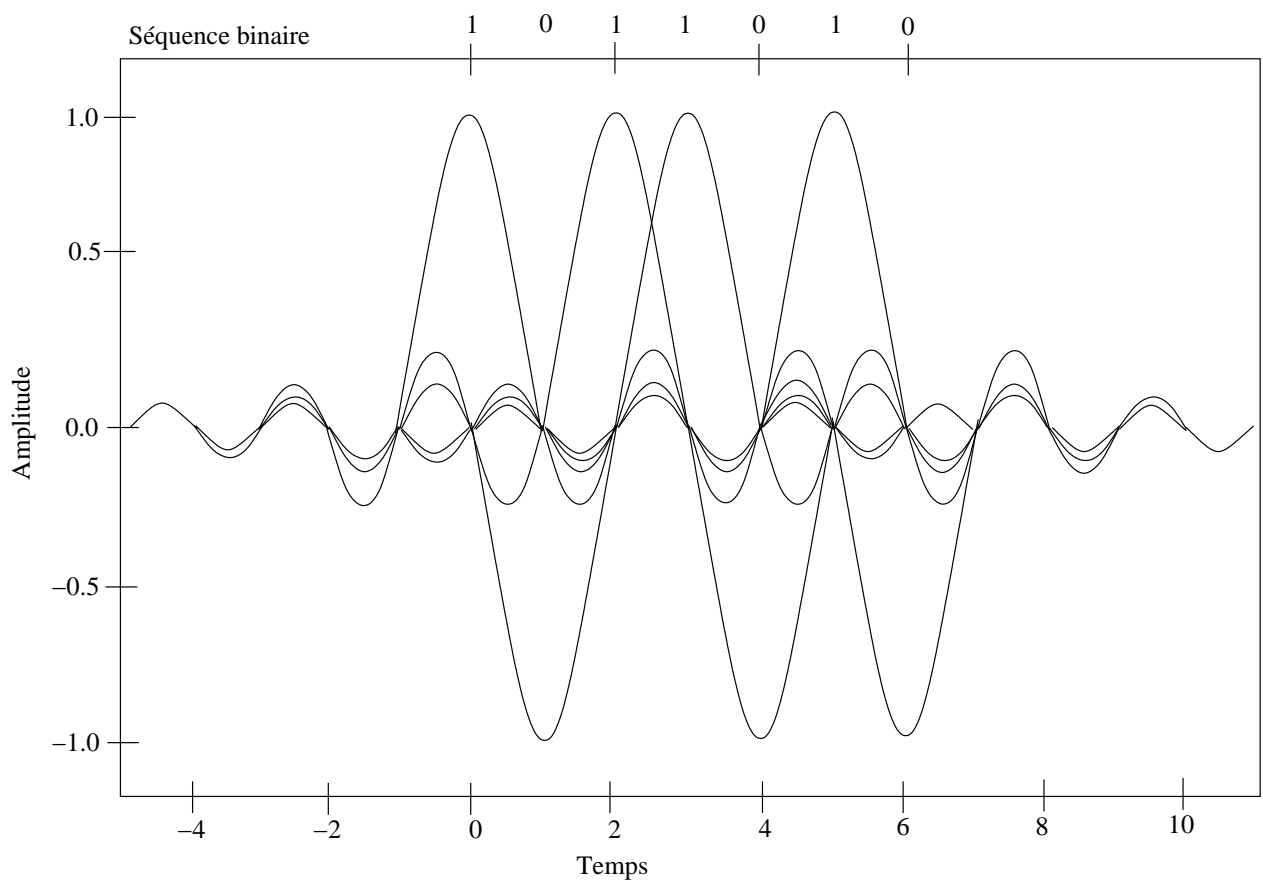


FIG. 5.3 – Une série d'impulsions correspondant à la séquence 1011010.

Le premier terme correspond au symbole désiré, tandis que la série représente l'interférence inter-symboles dues à l'erreur Δt . Il est malheureusement possible que cette série diverge, provoquant des décisions erronées au récepteur.

5.2.2 Impulsion en cosinus surélevé

Nous pouvons trouver une parade aux difficultés rencontrées avec le canal idéal de NYQUIST en augmentant le bande passante d'une valeur ajustable entre W et $2W$. Nous allons spécifier la fonction $\mathcal{P}(f)$, en considérant trois termes de la condition 5.18, et restreindre l'intervalle de fréquence étudié à $[-W, +W]$. On obtient donc une forme approchée du critère de NYQUIST :

$$\mathcal{P}(f) + \mathcal{P}(f - 2W) + \mathcal{P}(f + 2W) = \frac{1}{2W}, \quad -W \leq f \leq W \quad (5.30)$$

Il est possible de déterminer un ensemble de fonctions $\mathcal{P}(f)$ qui vérifient cette dernière condition. Une forme spéciale de la fonction $\mathcal{P}(f)$ souvent utilisée en pratique est l'*impulsion en cosinus surélevé* dont le spectre est donné par

$$\mathcal{P}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} & 0 \leq |f| < f_1 \\ \frac{1}{4W} \left\{ 1 - \sin \left[\frac{\pi(|f| - W)}{2W - 2f_1} \right] \right\} & f_1 \leq |f| \leq 2W - f_1 \\ 0 & |f| \geq 2W - f_1 \end{cases} \quad (5.31)$$

La constante f_1 et la bande de base W sont liées par

$$\alpha = 1 - \frac{f_1}{W} \quad (5.32)$$

où α est un paramètre, appelé *facteur de rolloff*, qui indique l'excès en bande passante nécessaire par rapport au canal idéal de NYQUIST. La bande passante du système B_T est maintenant égale à

$$B_T = 2W - f_1 = W(1 + \alpha) \quad (5.33)$$

Les fonctions $\mathcal{P}(f)$ et $p(t)$ sont respectivement représentées aux figures 5.4.(a) et 5.4.(b) pour $\alpha = 0$, $\alpha = 0,5$ et 1 . Pour $\alpha = 0$, l'impulsion correspond au canal idéal de NYQUIST. L'impulsion $p(t)$ est simplement la transformée de FOURIER inverse de $\mathcal{P}(f)$

$$p(t) = \text{sinc}(2Wt) \left(\frac{\cos(2\pi\alpha Wt)}{1 - 16\alpha^2 W^2 t^2} \right) \quad (5.34)$$

La fonction $p(t)$ est formée par le produit de deux facteurs : le facteur $\text{sinc}(2Wt)$ qui correspond au canal idéal et une fonction qui décroît en $1/|t|^2$ lorsque $|t|$ est grand. Le premier facteur assure que la fonction $p(t)$ passe par zéro aux instants d'échantillonnage $t_i = i\Delta t$ tandis que le second facteur réduit l'extension temporelle de l'impulsion de telle sorte que l'erreur Δt est considérablement réduite. Pour $\alpha = 1$, l'extension temporelle de l'impulsion est minimale. L'erreur Δt diminue donc lorsque α augmente. Cependant, la bande passante est d'autant plus grande que α est grand, pour atteindre sa valeur maximale $2W$ –soit le double de la bande passante nécessaire pour le canal idéal de NYQUIST–, lorsque $\alpha = 1$. Un compromis existe donc entre la bande passante et la diminution de l'interférence inter-symboles. Typiquement, une valeur de $\alpha = 0.3$ convient.

La synthèse d'un système de télécommunications numérique est rendue difficile par le fait que c'est la fonction $p(t)$ qui doit posséder une réponse impulsionnelle en forme de cosinus surélevé. Or, $p(t)$ résulte de la mise en cascade de trois systèmes ($g_E(t)$, $h(t)$ et $g_R(t)$). La synthèse de ces systèmes doit donc être telle que l'ensemble doit être caractérisé par un cosinus surélevé.

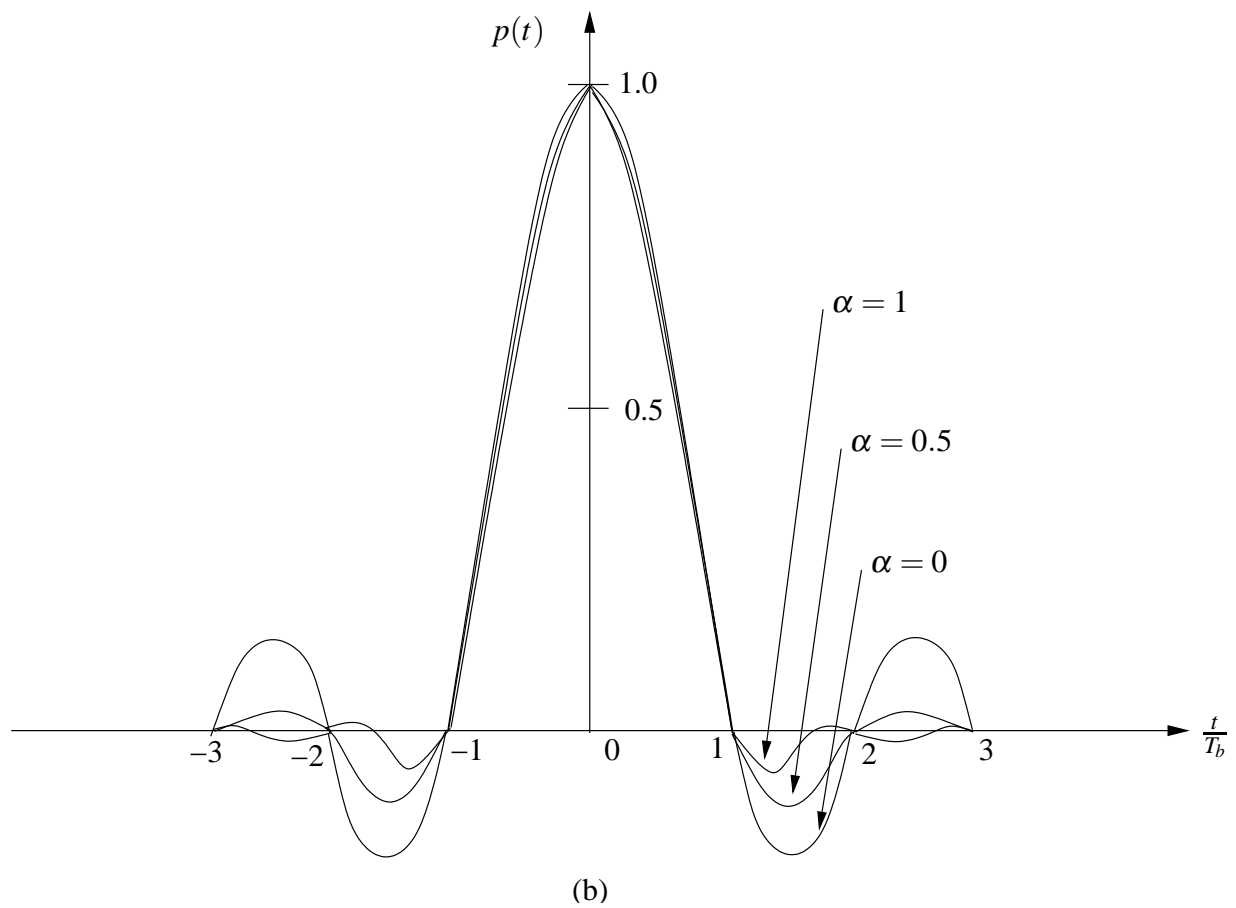
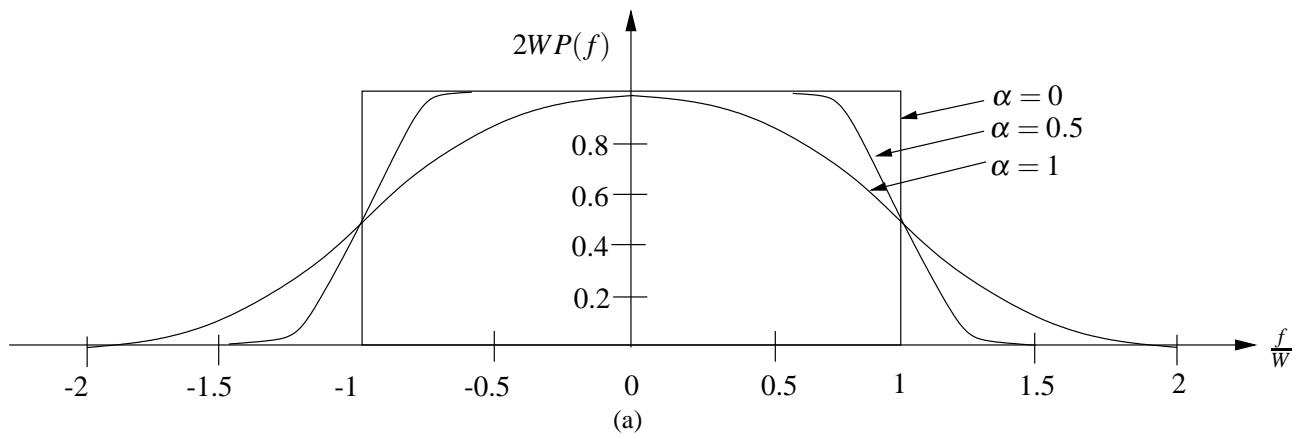


FIG. 5.4 – Impulsion en cosinus surélevé.

Chapitre 6

Étalement de spectre

6.1 Introduction

L'occupation spectrale est un souci récurrent pour la mise au point de techniques de modulation. Lors d'une transmission en bande de base, on cherche à donner une forme adéquate à la densité spectrale en fonction de l'application visée. Pour des communications en espace libre, on tente de trouver le compromis entre l'occupation spectrale et la résistance au bruit.

Un système à étalement de spectre se caractérise par le fait que la bande passante B est largement supérieure au débit d'information R_b , exprimé en $[b/s]$. Cet accroissement de bande s'accompagne, comme nous le verrons par la suite, d'une meilleure résistance au bruit.

Historiquement, ce sont les militaires qui ont développé en premier les techniques d'étalement de spectre. Il existe néanmoins aujourd'hui des systèmes de transmission numérique commerciaux qui en utilisent le principe. Le tableau 6.1 fournit une comparaison des différentes fonctions de l'étalement de spectre.

Objectifs	Domaine militaire	Application commerciale
Lutte contre le brouillage	✓	✓
Accès multiple	✓	✓
Détection difficile	✓	
Protection des données	✓	✓
Appel sélectif	✓	✓
Identification	✓	✓
Navigation	✓	✓
Protection contre les multi-trajets	✓	✓
Faible densité de flux émis	✓	✓

TAB. 6.1 – Applications de systèmes à étalement de spectre (d'après [22]).

6.1.1 Techniques d'étalement

Il existe essentiellement deux techniques d'étalement du spectre

- l'étalement par sauts de fréquence ou *Frequency Hopping*. Le spectre d'une porteuse modulée est étalé en changeant la fréquence de la porteuse pseudo-aléatoirement au cours du temps, ce qui permet de faire varier T_c pseudo-aléatoirement au cours du temps. La technique du saut de fréquence (non-aléatoire) est utilisée en GSM (cf. [12] pour plus de détails).

- l'étalement direct ou *Direct Spreading* (DS). Cette technique porte aussi le nom *Code-Division Multiplexing* (CDM) car elle consiste à étaler le spectre en multipliant le signal utile par un signal numérique dont la cadence bit est nettement supérieure appelé *code*.

Dans tout système de transmission, qu'il soit partagé ou non, il est nécessaire de créer le signal à transmettre mais aussi de définir des moyens et conventions pour interpréter correctement le signal à la réception. Il faut donc détailler un moyen d'accéder au message utile après étalement. Ces techniques sont reprises généralement sous le vocable de *Code-Division Multiple Access* (CDMA), qui est souvent utilisé pour désigner la technique d'étalement direct elle-même.

Dans la suite, nous analysons la technique de l'étalement ; la question de l'accès au signal n'est pas abordée dans ce chapitre.

6.2 Étalement direct

6.2.1 Principes de base de l'étalement direct

Pour aborder les développements mathématiques, prenons un exemple simple permettant d'illustrer le principe de l'étalement. Dans un système à étalement de spectre, on considère deux types de signaux :

1. le signal contenant les données à transmettre, de période T_b ,
2. le signal permettant d'effectuer l'étalement, de période T_c (on parle de "*chip*"), nettement plus petite que T_b .

Par la suite, nous choisissons que T_b est un multiple entier de période T_c :

$$T_b = NT_c \quad (6.1)$$

Ce choix permet, entre autres, d'assurer une cohérence entre la synchronisation des informations portées par les deux signaux.

Considérons la figure 6.1. Le premier signal représente le signal de données binaires à transmettre (ici, deux bits) ainsi que l'occupation spectrale associée (idéalisée). Le deuxième signal représente un exemple de séquence d'étalement. On constate que son occupation spectrale est dilatée par N .

Dans un système à étalement direct, le taux de transmission de symboles ($1/T_b$) d'un signal binaire est modifié en multipliant cette onde par un code bipolaire binaire pseudo-aléatoire périodique dont la durée T_c est nettement plus courte que celle de départ ; on obtient alors un signal tel que celui représenté à la troisième ligne de la figure 6.1. Son spectre est approximativement aussi large que celui de la séquence d'étalement.

La figure 6.2 donne une représentation plus fidèle des densités spectrales de puissance du signal de données et de la séquence d'étalement. Elle met aussi en lumière le théorème de conservation de la puissance (conservation de l'aire sous la courbe).

Un raisonnement simple, par l'absurde, permet de se convaincre de la conservation de puissance. En effet, le signal étalé résulte de la multiplication de la séquence initiale par le code d'étalement. Remarquons qu'une deuxième multiplication du signal étalé par le code d'étalement fournit le signal de départ. Dès lors, s'il y avait perte ou gain de puissance durant l'étalement, l'application successive de deux phases d'étalement ne fournirait pas le signal de départ.

Les séquences d'étalement ont pour but de faire apparaître, pour l'utilisateur courant, les autres utilisateurs comme du bruit. Ces séquences doivent dès lors avoir les caractéristiques les plus proches possible de celles d'un bruit blanc. Néanmoins, pour que le récepteur puisse retrouver le signal utile, il doit aussi être capable de régénérer la séquence ayant servi à l'étalement. Il ne peut donc s'agir d'une

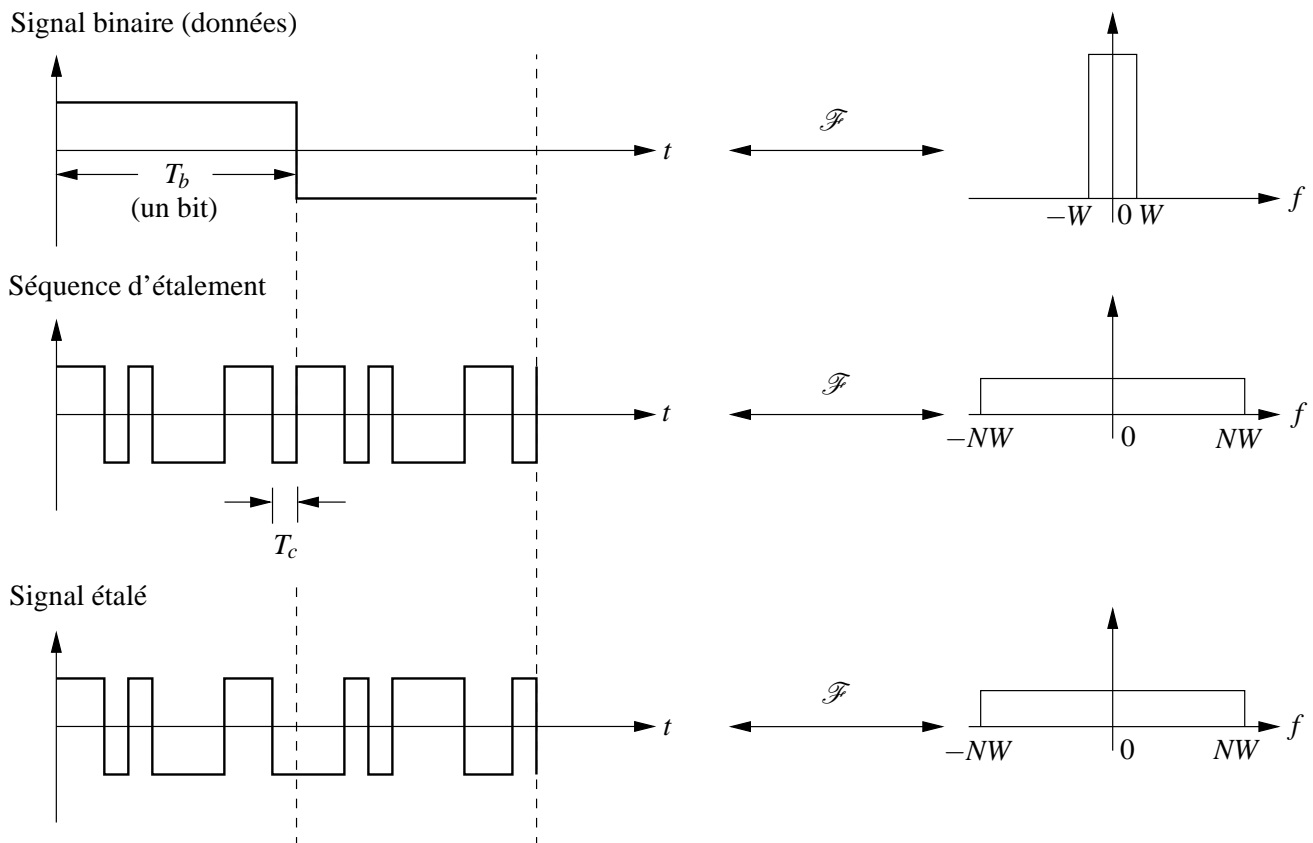


FIG. 6.1 – Exemple d'étalement d'un signal de données binaires.

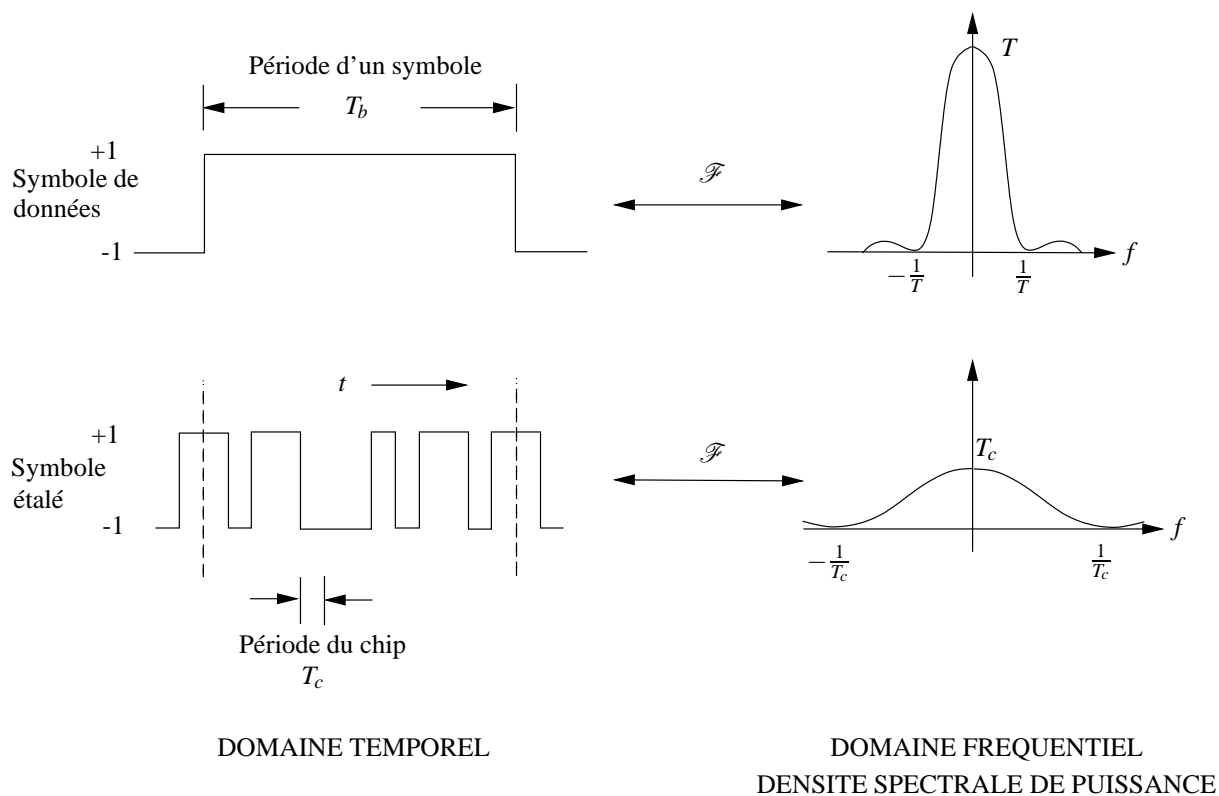


FIG. 6.2 – Effet de la multiplication par une séquence sur le spectre.

véritable séquence aléatoire mais bien d'une séquence déterministe ayant des propriétés aussi proches que possibles de celles d'une séquence aléatoire ; on parle donc de *séquences pseudo-aléatoires*. De plus, pour des raisons pratiques de réalisation, les séquences sont périodiques.

Pour construire des générateurs de séquences pseudo-aléatoires, on peut partir de l'étude des propriétés des séquences aléatoires et imposer algébriquement des propriétés similaires aux générateurs. C'est la démarche que nous suivrons ici. Une remarque s'impose néanmoins : il est possible de construire plusieurs types de générateurs de séquences aléatoires. L'étude menée dans ce document ne se veut donc pas exhaustive. Le lecteur est invité à consulter des ouvrages spécialisés pour une typologie des générateurs de séquences pseudo-aléatoires.

6.2.2 Génération des séquences pseudo-aléatoires

Une séquence pseudo-aléatoire est une séquence binaire périodique dont l'onde ressemble, mis à part le caractère périodique, à une séquence binaire totalement aléatoire proche d'un bruit. Ce type de séquences est par exemple généré à l'aide d'un registre à décalage à contre-réaction, dont le schéma général est montré à la figure 6.3.

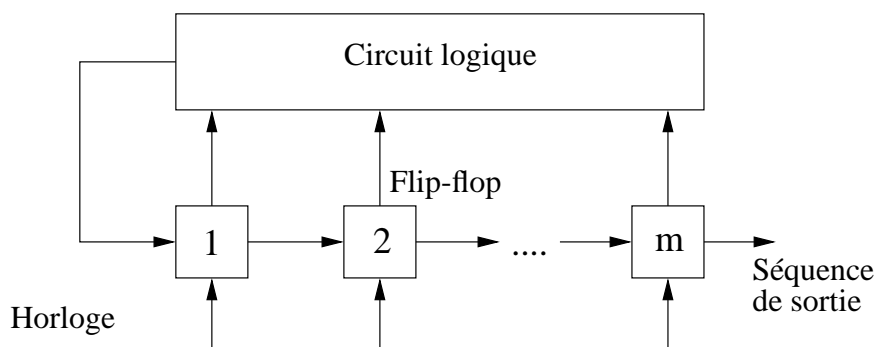


FIG. 6.3 – Registre à décalage à contre-réaction.

Ce registre est constitué de m flip-flops (éléments mémoire) et d'un circuit logique qui sont interconnectés pour former un circuit à contre-réaction. Les flip-flops sont régulés par une seule horloge. À chaque coup d'horloge, le contenu de chaque flip-flop est décalé d'une place vers la droite. De même, à chaque coup d'horloge, le circuit logique calcule une fonction booléenne du contenu des m flip-flops et le résultat est réinjecté à l'entrée du registre. La séquence pseudo-aléatoire est ainsi déterminée par le nombre m de flip-flops, l'état initial du registre et la fonction booléenne implémentée.

Avec un nombre m de flip-flops, le registre peut avoir 2^m états possibles. Ainsi, la séquence pseudo-aléatoire, issue de la sortie du dernier flip-flop, peut avoir au maximum une période de 2^m . Lorsque le circuit logique est constitué uniquement d'additionneurs modulo-2, le registre est dit *linéaire* et l'état 0 (zéro dans chaque flip-flop) n'est pas permis sinon la séquence pseudo-aléatoire reste indéfiniment nulle. Dès lors, une séquence pseudo-aléatoire générée par un registre à décalage linéaire ne peut avoir qu'une période maximale de $2^m - 1$. On parle alors de *séquence de longueur maximale*.

Tout l'art de la conception du circuit consiste à synthétiser une fonction booléenne génératrice d'une séquence se rapprochant au mieux d'une séquence aléatoire.

Exemple. Considérons le registre à décalage linéaire de la figure 6.4.

L'état initial du registre est supposé être 100 (lorsqu'on lit le contenu des flip-flops de la gauche vers la droite). Les états successifs du registre sont 100, 110, 111, 011, 101, 010, 001, 100, ... La séquence de sortie est alors égale à 0011101..., qui se répète ; cette séquence a une période de $2^3 - 1 = 7$ bits. Il est à noter que l'état initial est arbitraire mais non nul.

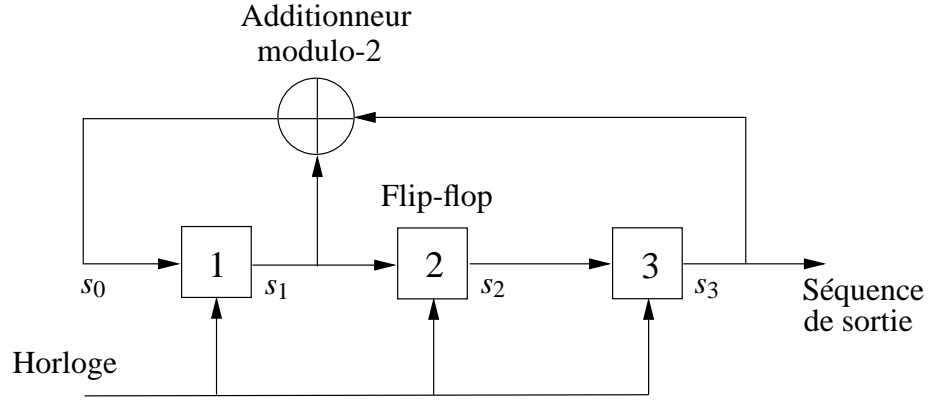


FIG. 6.4 – Exemple de registre à décalage linéaire.

Propriétés d'une séquence de longueur maximale

Considérons des symboles 0 et 1 respectivement représentés par les niveaux -1 et $+1$. Les séquences de longueur maximale ont des propriétés proches de celles des séquences binaires purement aléatoires¹, à savoir une moyenne nulle et une fonction d'auto-corrélation en forme de delta de DIRAC.

Établissons ces propriétés. La période d'une séquence de longueur maximale est définie par

$$N = 2^m - 1 \quad (6.2)$$

Appelons $c(t)$ l'onde résultant de la séquence de longueur maximale, comme illustré à la figure 6.5(a) pour $N = 7$.

La période de l'onde $c(t)$ est égale à

$$T_b = NT_c \quad (6.3)$$

où T_c , appelée *période chip*, est la durée d'un bit de la séquence de longueur maximale.

Deux propriétés des séquences pseudo-aléatoires sont immédiates :

1. **[Espérance]** Pour une séquence à longueur maximale, tous les états internes des registres sont possibles à l'exception de l'état nul (il y a 7 états internes possibles dans notre exemple). Si l'on retire l'état avec tous les bits mis à 1, pour tout état interne il y a un dual (les 0 sont à 1 et réciproquement). Un état et son dual fournissent en sortie des bits de signe opposé et donc ces derniers se compensent. Pour le calcul de l'espérance, il ne reste alors qu'à considérer l'état avec tous les bits à 1, qui lui fournit 1 en sortie. Dès lors, l'espérance vaut

$$E\{c(t)\} = \frac{1}{N} \quad (6.4)$$

Contrairement à une séquence aléatoire, l'espérance n'est pas nulle mais elle diminue avec la taille du code d'étalement.

2. **[Périodicité de la fonction d'auto-corrélation]** La fonction d'autocorrélation d'une séquence de longueur maximale est périodique.

Par l'établissement de la fonction d'autocorrélation, nous partons de la définition de la fonction d'autocorrélation d'un signal périodique $c(t)$ de période T_b , qui est donnée par

$$\Gamma_{cc}(\tau) = \frac{1}{T_b} \int_{-T_b/2}^{+T_b/2} c(t)c(t+\tau)d\tau \quad (6.5)$$

¹L'utilisation d'une séquence réellement aléatoire ne permettrait pas de restituer le signal utile au récepteur précisément en raison de l'aspect aléatoire !

où τ appartient à l'intervalle $[-T_b/2, +T_b/2]$. En appliquant cette formule à la séquence de longueur maximale $c(t)$, on obtient

$$\Gamma_{cc}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{N+1}{NT_c} |\tau|, & |\tau| \leq T_c \\ -\frac{1}{N} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.6)$$

Ce résultat est montré à la figure 6.5(b) pour $m = 3$ et $N = 7$.

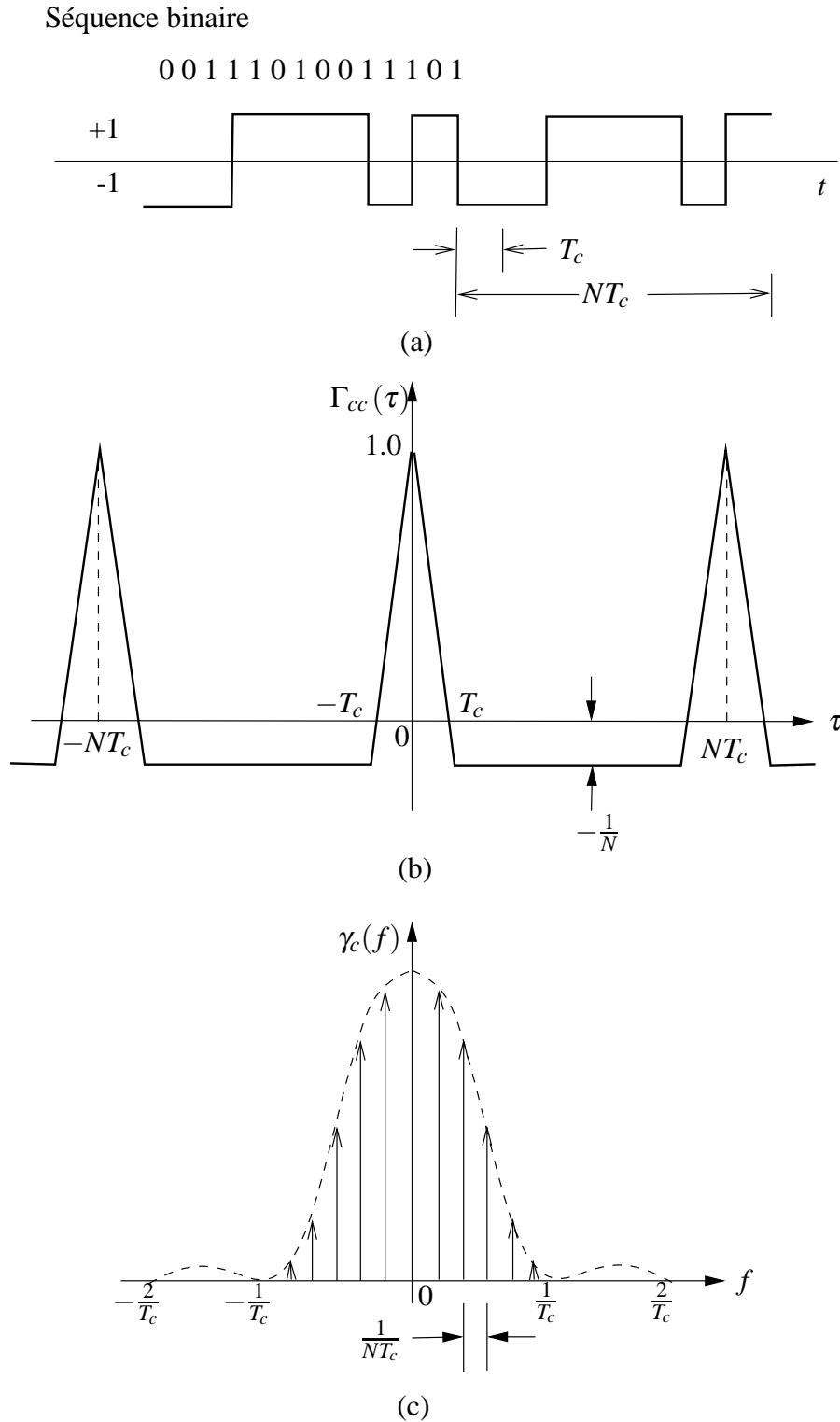


FIG. 6.5 – Propriétés d'une séquence de longueur maximale.

Étant donné qu'une périodicité dans le domaine temporel correspond à un échantillonnage uniforme dans le domaine fréquentiel, et la forme de la fonction d'autocorrélation de $c(t)$, on peut déterminer la densité spectrale de puissance de $c(t)$

$$\gamma_c(f) = \frac{1}{N^2} \delta(f) + \frac{1+N}{N^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi \frac{n}{N})}{\pi \frac{n}{N}} \right)^2 \delta\left(f - \frac{n}{NT_c}\right) \quad (6.7)$$

qui est représentée à la figure 6.5(c) pour $m = 3$ et $N = 7$. Au vu de ces résultats, il est maintenant possible de comparer une séquence de longueur maximale et une séquence réellement aléatoire :

- sur une période de la séquence de longueur maximale, la fonction d'autocorrélation de $c(t)$ est similaire à celle de la séquence aléatoire. En effet, la fonction d'autocorrélation d'une séquence aléatoire vaut

$$\begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c} & |\tau| \leq T_c \\ 0 & |\tau| > T_c \end{cases} \quad (6.8)$$

Il apparaît donc que les densités spectrales des deux séquences ont une même enveloppe, à savoir $\text{sinc}^2(fT)$.

- la différence fondamentale réside dans le fait que le spectre de la séquence aléatoire est continu tandis que celui de la séquence de longueur maximale est composé de raies espacées de $1/NT_c$.

Lorsque l'on augmente la valeur de N , c'est-à-dire le longueur de la séquence de longueur maximale, la séquence pseudo-aléatoire se rapproche plus d'une séquence aléatoire pure. Cependant, le prix à payer avec une grande valeur de N , est une augmentation de la bande passante nécessaire. Un compromis doit dès lors être établi.

Choix d'une séquence de longueur maximale

La question qui se pose à présent consiste à savoir comment choisir la fonction logique du registre à décalage pour obtenir une période désirée N . La littérature fournit des tables avec les connections à réaliser entre les éléments du circuit pour différentes valeurs de m . Une telle table est montrée à la figure 6.6.

Registre à décalage de longueur m	Configurations possibles pour la rétroaction
2	[2,1]
3	[3,1]
4	[4,1]
5	[5,2], [5,4,3,2], [5,4,2,1]
6	[6,1], [6,5,2,1], [6,5,3,2]
7	[7,1], [7,3], [7,3,2,1], [7,4,3,2], [7,6,4,2], [7,6,3,1], [7,6,5,2], [7,6,5,4,2,1], [7,5,4,3,2,1]
8	[8,4,3,2], [8,6,5,3], [8,6,5,2], [8,5,3,1], [8,6,5,1], [8,7,6,1], [8,7,6,5,2,1], [8,6,4,3,2,1]

FIG. 6.6 – Table permettant de construire le registre à décalage adéquat [16, page 584].

Plus m augmente, plus il y a de possibilités de circuits.

Exemple. Considérons une séquence de longueur maximale nécessitant l'utilisation d'un registre de longueur $m = 5$. Pour cette valeur de m , nous choisissons dans la table une boucle à rétroaction du

type [5, 2]. La configuration correspondante est montrée à la figure 6.7(a). En supposant un état initial 10000, la figure 6.2 montre l'évolution du registre pour une période de la séquence de longueur maximale. On remarque qu'en fin de période, le registre est revenu à son état initial. On aurait également pu choisir la configuration [5, 4, 2, 1] comme le montre la figure 6.7(b) et on aurait une autre séquence pseudo-aléatoire de même longueur.

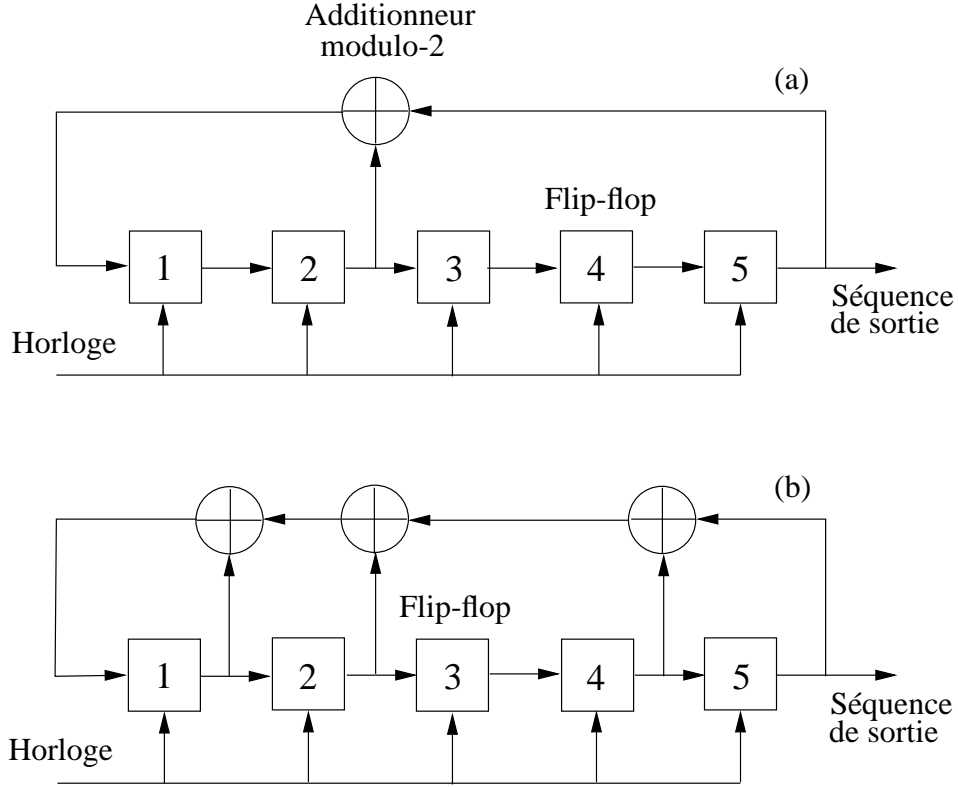


FIG. 6.7 – Deux schémas possibles pour $m = 5$ [16, page 584].

6.2.3 Principe de la transmission en bande de base

Soit la séquence binaire $\{b_k\}$ représentant l'information à transmettre. Cette séquence conduit à définir une onde continue $b(t)$ par un codage de type NRZ bipolaire ± 1 . De même, on constitue un signal temporel $c(t)$ à partir des éléments $\{c_k\}$ d'une séquence pseudo-aléatoire.

L'étalement du spectre de $b(t)$ se réalise au moyen d'une *modulation*² qui n'est autre que la multiplication de $c(t)$ et $b(t)$, comme le montre la figure 6.8(a).

Or, une multiplication dans le domaine temporel revient à faire une convolution dans le domaine fréquentiel. Dès lors, si le signal $b(t)$ est à bande étroite et que $c(t)$ est à large bande, le spectre du signal résultant

$$m(t) = c(t)b(t) \quad (6.9)$$

sera pratiquement aussi large que celui de $c(t)$. En effet,

$$\mathcal{M}(f) = \mathcal{B}(f) \otimes \mathcal{C}(f) \quad (6.10)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}(\tau) \mathcal{B}(f - \tau) d\tau \quad (6.11)$$

²Conformément à l'usage repris dans la littérature scientifique, le terme *modulation* est utilisé tantôt pour décrire l'étalement, tantôt pour désigner l'opération qui fait intervenir une porteuse $A_C \cos(2\pi f_c t)$.

	Registres					
Bit de rétroaction	1	0	0	0	0	Bit de sortie
0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1

TAB. 6.2 – Évolution du registre de la figure 6.7(a) au cours d’une période de la séquence [16, page 585].

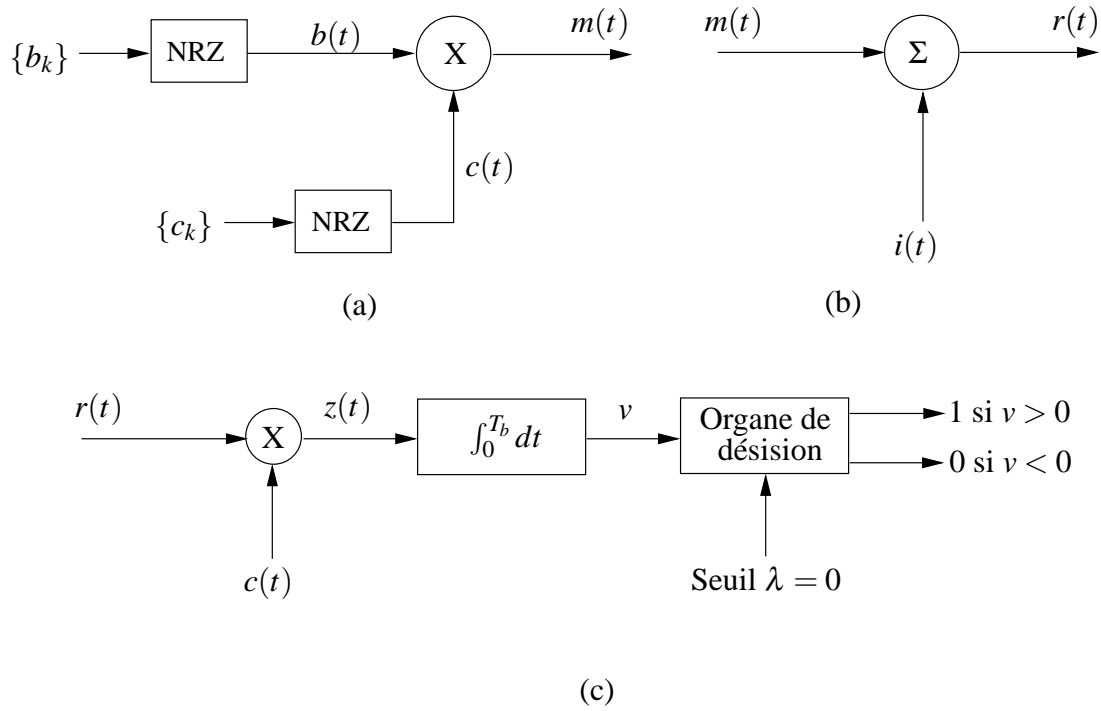


FIG. 6.8 – Modèle d'une transmission à spectre étalé en bande de base.

Or, on effectue le produit des deux courbes et on intègre sur toutes les valeurs différentes de zéro. On obtient dès lors un signal large bande. De plus, la figure 6.9 montre très clairement que la période du signal étalé est de T_c et donc la bande de base du signal étalé vaut $\frac{1}{2T_c}$, ce qui représente un signal large bande.

On dit que la séquence $c(t)$ joue le rôle de *code d'étalement*. La formation du signal $m(t)$ est montrée à la figure 6.9.

Pour une transmission en bande de base (sans utilisation d'une porteuse), on transmet le signal étalé $m(t)$ sur le canal.

Le récepteur reçoit le signal étalé $m(t)$ bruité par des interférences caractérisées par le signal $i(t)$ (cf. figure 6.8(b))

$$r(t) = m(t) + i(t) \quad (6.12)$$

$$= c(t)b(t) + i(t) \quad (6.13)$$

Le signal d'interférence se compose de signaux émis par d'autres utilisateurs dans la même bande de fréquences ainsi que du bruit.

Pour recouvrer le signal original et la séquence binaire sous-jacente, le signal reçu $r(t)$ est appliqué à l'entrée d'un démodulateur qui consiste en une multiplication suivi d'un intégrateur et d'un organe de décision, comme l'illustre la figure 6.8(c). Au niveau du mélangeur, le signal reçu $r(t)$ est multiplié par une réplique exacte de la séquence pseudo-aléatoire utilisée au récepteur.

Nous faisons l'hypothèse que le récepteur travaille en synchronisme parfait avec l'émetteur. La sortie de l'étage de multiplication est alors donnée par

$$z(t) = c(t)r(t) \quad (6.14)$$

$$= c^2(t)b(t) + c(t)i(t) \quad (6.15)$$

Cette dernière équation montre que le signal $b(t)$ est multiplié deux fois par la séquence pseudo-aléatoire $c(t)$, tandis que le signal $i(t)$ n'est multiplié qu'une seule fois. Vu que $c(t)$ vaut $+1$ ou -1 ,

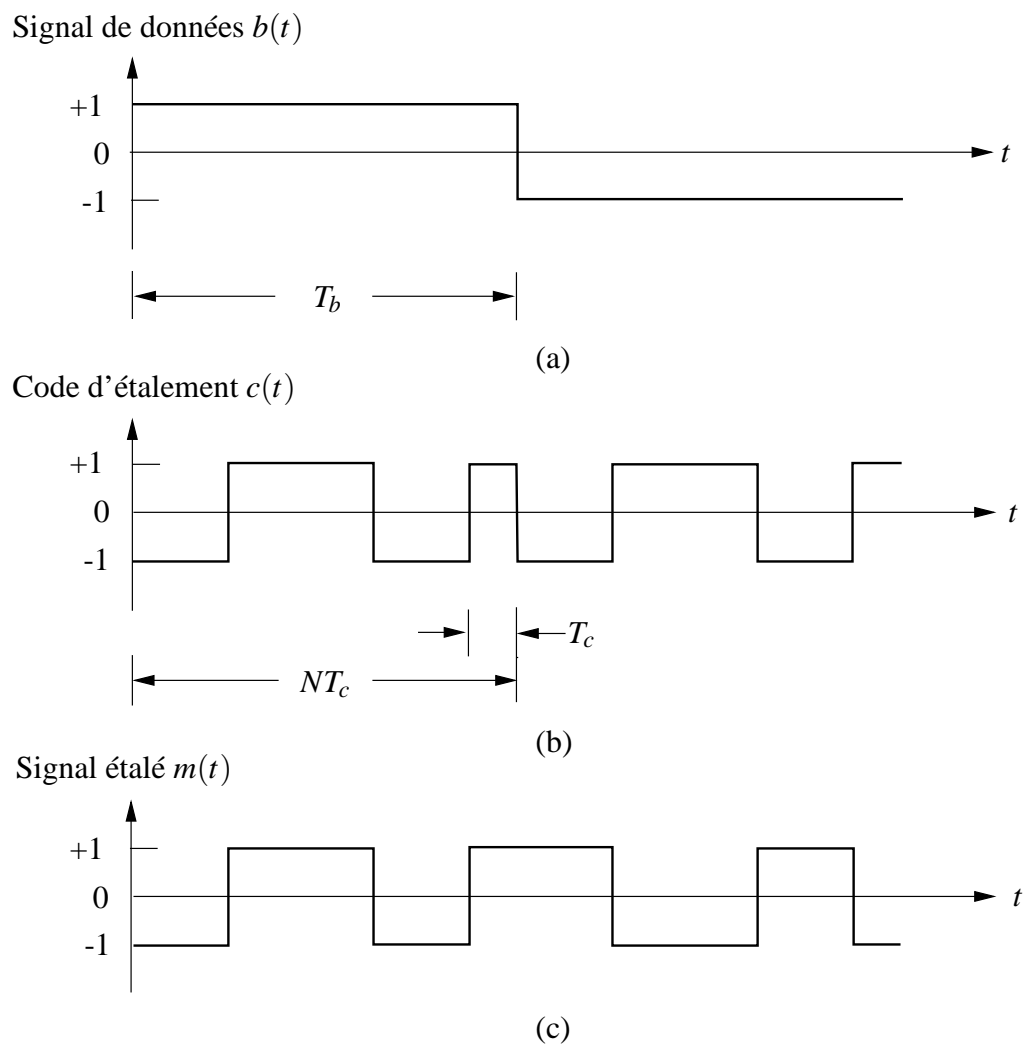


FIG. 6.9 – Formation du signal $m(t)$ par étalement du spectre de $b(t)$.

le signal $c^2(t)$ est égal à 1 pour tout instant t . Donc, le signal $z(t)$ se réduit à

$$z(t) = b(t) + c(t)i(t) \quad (6.16)$$

Nous voyons donc que le signal $b(t)$, qui contient l'information utile, se retrouve à la sortie de l'étage de multiplication. Si le terme additif $c(t)i(t)$ semble gênant, il faut bien voir que la multiplication de $i(t)$ par le code d'étalement $c(t)$ a pour effet d'étaler le spectre de $i(t)$. Dès lors, le signal $c(t)i(t)$ est à large bande tandis que le signal $b(t)$ est à bande étroite. Ce signal large bande contient notamment les signaux étalés des autres utilisateurs, ceux-ci étant considérés comme du bruit.

En appliquant le signal $z(t)$ à l'entrée d'un filtre passe-bas, en l'occurrence l'intégrateur, la majeure partie de l'énergie de $c(t)i(t)$ est filtrée. L'effet de l'interférence $i(t)$ est donc fortement réduit à la sortie du récepteur. En réalité, à partir du signal $z(t)$, tout se passe comme pour la démodulation d'un signal numérique par le filtre adapté suivi de l'organe de décision. Le signal $b(t)$ est le signal numérique à démoduler et $c(t)i(t)$ peut être vu comme l'approximation d'un bruit blanc additif gaussien. Plus la séquence pseudo-aléatoire est longue, plus cette approximation est vérifiée. Cependant, le prix à payer pour cette augmentation de la protection contre les interférences est une augmentation de la bande passante requise, de la complexité du système, ainsi que des délais.

En résumé, l'utilisation d'un code d'étalement dans l'émetteur produit un signal large bande transmis sur le canal. Celui-ci apparaît comme du bruit pour un récepteur qui n'a pas connaissance du code d'étalement initial.

6.2.4 Étalement direct par modulation BPSK

Nous allons à présent voir comment on peut intégrer la notion d'étalement direct de spectre dans un système de modulation. Le type de modulation choisie est une modulation de phase binaire *cohérente* (BPSK).

La figure 6.10(a) montre le schéma d'un tel modulateur. Le modulateur transforme tout d'abord la séquence $\{b_k\}$ en signal NRZ bipolaire pour obtenir le signal $b(t)$. Il y a ensuite deux étages de modulation : le premier étage multiplie le signal $b(t)$ par la séquence pseudo-aléatoire $c(t)$ tandis que le deuxième étage est un modulateur BPSK. Le message transmis $x(t)$ est alors un signal modulé en DS/BPSK (*Direct-Sequence spread Binary Phase Shift-Keying*). La phase $\theta(t)$ du signal modulé $x(t)$ vaut 0 ou π selon que les signaux $b(t)$ et $c(t)$ sont de même polarité ou non à l'instant t . Un saut de phase est ainsi observé tous les T_c .

La figure 6.11 illustre la formation du signal modulé BPSK. La figure 6.11.(c) représente donc le signal qui sera envoyé sur le canal pour la transmission d'un bit.

Le récepteur, illustré à la figure 6.10(b) est composé de deux étages. Au niveau du premier étage, le signal reçu $y(t)$ est appliqué à l'entrée d'un démodulateur cohérent BPSK, constitué d'un mélangeur alimenté par une porteuse générée localement, suivi d'un filtre passe-bas dont la bande passante est limitée à celle de $m(t)$. Le deuxième étage de démodulation effectue le "désétalement" du spectre en multipliant la sortie du filtre passe-bas par la copie exacte de la séquence pseudo-aléatoire utilisée à l'émetteur. Le reste de la démodulation est identique à celle utilisée pour la transmission en bande de base (filtre adapté et organe de décision).

Bruit

Remarquons que le canal de transmission contient une série de bruits, typiques pour ce genre d'applications :

- un bruit blanc additif gaussien, qui modélise la présence d'une somme de bruits indépendant entre eux.

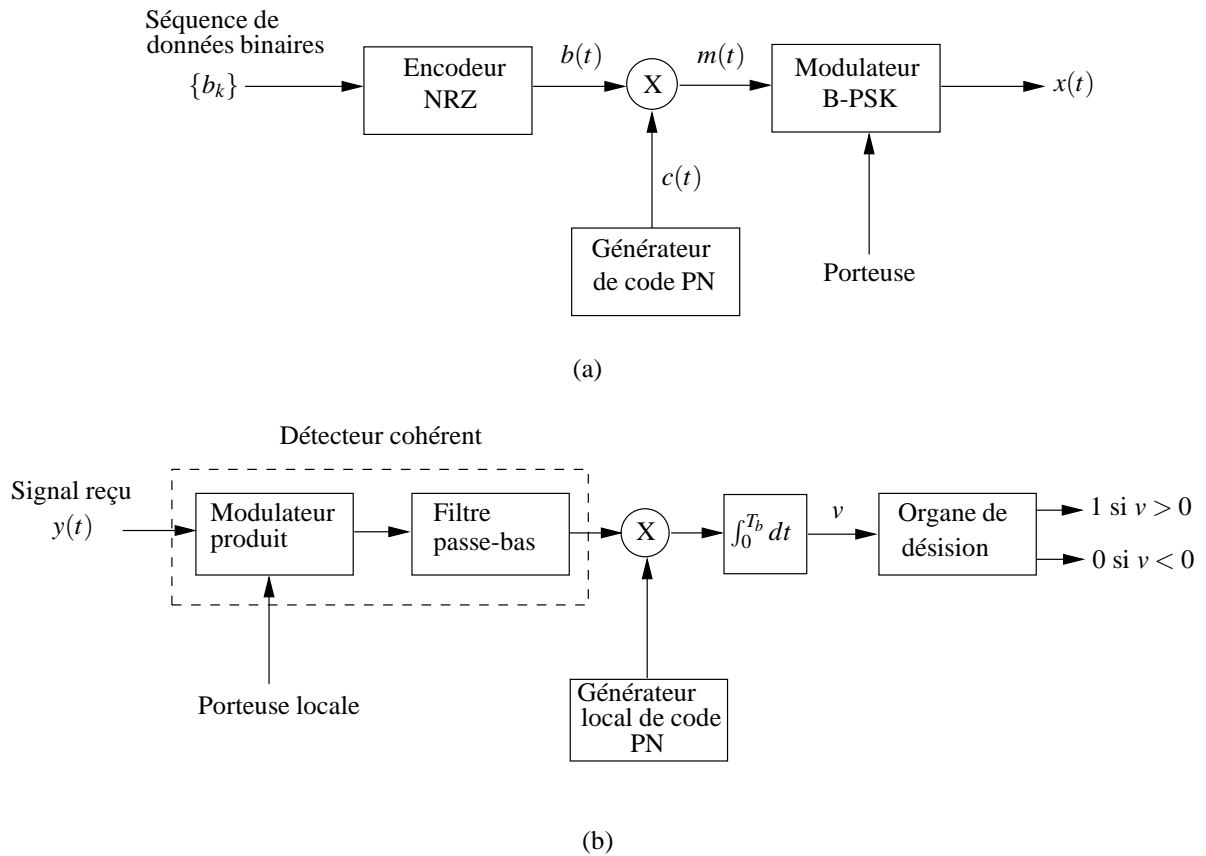


FIG. 6.10 – Schéma-bloc de la modulation DS/BPSK.

- des interférences à bande étroite, qui viennent se “loger” dans certaines bandes de fréquence. C’est précisément au moment de contrer ces bruits (ou signaux) parasites à bande étroite que l’étalement direct, voire par sauts de fréquence, montre tout son intérêt.
- les signaux BPSK/CDMA des autres utilisateurs. Si M représente le nombre d’utilisateurs dans la même bande de fréquence, on considère généralement une puissance de bruit égale à $M - 1$ fois la puissance nominale d’un utilisateur.

Analyse

La figure 6.10 représente un modulateur où l’étalement de spectre se fait avant la modulation de phase numérique. Pour une analyse plus détaillée, il est intéressant d’invertir –conceptuellement– ces deux étapes de modulation comme le montre le schéma de la figure 6.12. Cette permutation est licite car les opérations d’étalement de spectre et de modulation BPSK sont des multiplications, et donc commutatives. Il en va de même pour les opérations de démodulation. Le fait de permuter les deux opérations permet de modifier la réponse impulsionnelle du filtre adapté qui, pour rappel, est donnée par

$$h(t) = g(T_b - t) \quad (6.17)$$

Combinant les deux opérations, $g(t)$ devient $\cos(2\pi f_c t)$. La réponse impulsionnelle du filtre adapté sera donc un cosinus retourné.

Les interférences sont modélisées par le signal $j(t)$ qui est de type passe-bande. La sortie du canal

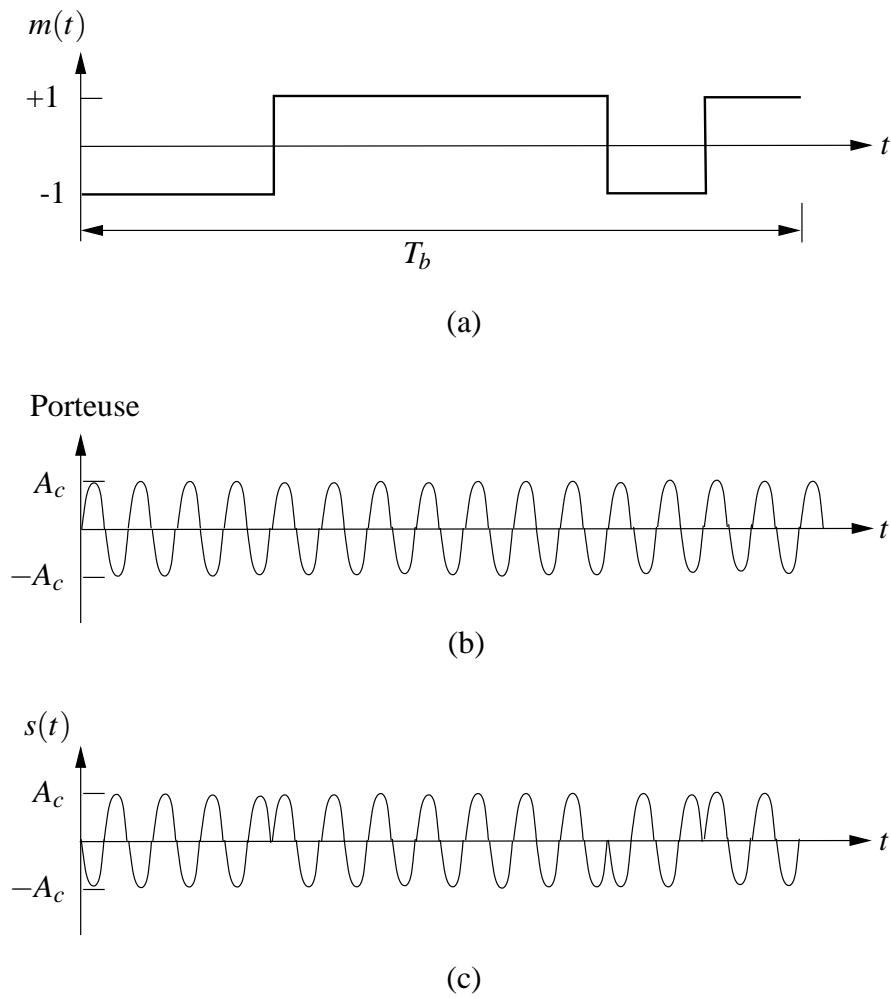


FIG. 6.11 – Modulation BPSK du signal.

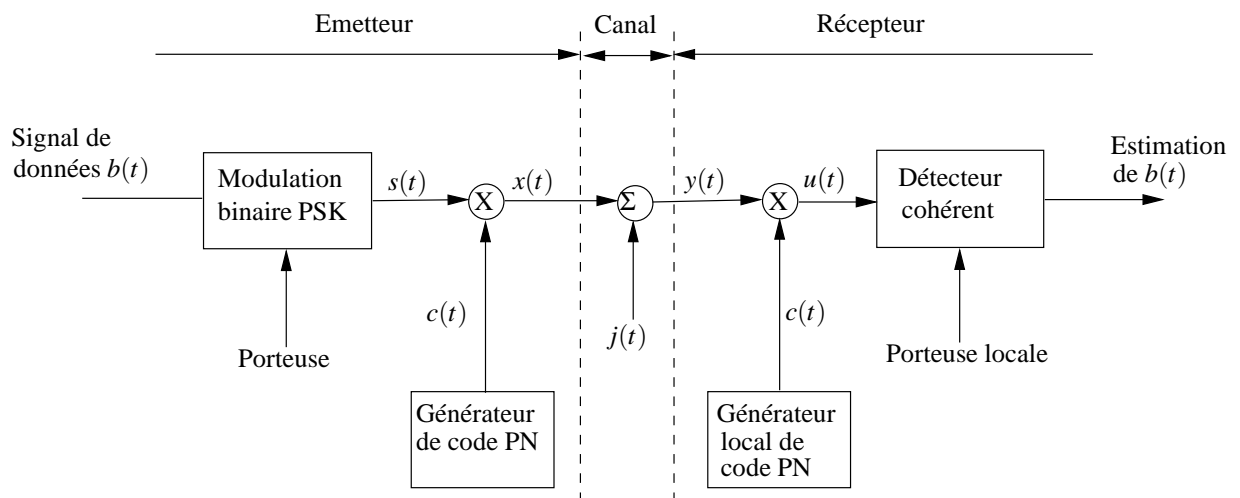


FIG. 6.12 – Permutation entre étalement et modulation de phase

$y(t)$ s'exprime donc par

$$y(t) = x(t) + j(t) \quad (6.18)$$

$$= c(t)s(t) + j(t) \quad (6.19)$$

où $s(t)$ est le résultat de la modulation BPSK du signal $b(t)$.

Au récepteur, le signal reçu $y(t)$ est tout d'abord multiplié par la séquence pseudo-aléatoire $c(t)$, ce qui donne le signal

$$u(t) = c(t)y(t) \quad (6.20)$$

$$= c^2(t)s(t) + c(t)j(t) \quad (6.21)$$

$$= s(t) + c(t)j(t) \quad (6.22)$$

Cette dernière équation montre que le signal à l'entrée du démodulateur cohérent BPSK est un signal modulé en BPSK augmenté de l'interférence $c(t)j(t)$. La démodulation peut alors se faire, comme pour le cas de la transmission en bande de base, en utilisant un filtre adapté suivi d'un organe de décision, le terme d'interférence étant considéré comme un bruit blanc additif gaussien.

6.3 Étude des performances

6.3.1 Gain d'étalement

Un calcul complet et détaillé (voir [16, page 596]) débouche sur une relation liant le rapport signal sur bruit à la sortie et celui à l'entrée ; en voici l'expression

$$10\log\left(\frac{S}{N}\right)_{OUT} = 10\log\left(\frac{S}{N}\right)_{IN} + 3 + 10\log\left(\frac{T_b}{T_c}\right) \quad (6.23)$$

Le terme de 3 [dB] provient du gain obtenu sur le rapport signal sur bruit en utilisant la détection cohérente.

Définition 23 On définit le gain d'étalement (en [dB]) comme

$$GE = 10\log\left(\frac{T_b}{T_c}\right) \quad (6.24)$$

Ce gain mesure l'impact sur le rapport signal sur bruit obtenu par usage de la technique d'étalement. On constate que le gain d'étalement égale le facteur d'étalement N . Plus la séquence d'étalement est longue, plus le gain d'étalement est important.

6.3.2 Probabilité d'erreur

Par un calcul semblable à ce qui a été fait pour la modulation BPSK (voir cours de "Principes des télécommunications analogiques et numériques"), il est possible de déterminer la probabilité d'erreur pour la modulation DS/BPSK ; elle vaut (cf. [16, page 597])

$$P_e \simeq \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{IT}}\right) \quad (6.25)$$

où E_b est l'énergie par bit du message $b(t)$, T_c la durée d'un chip et I la puissance moyenne du signal d'interférence

$$I = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} j^2(t) dt \quad (6.26)$$

En fait, si on compare cette probabilité d'erreur à celle obtenue pour la démodulation BPSK, tout se passe comme si le signal BPSK était plongé dans un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance égale à IT_c .

6.3.3 Marge d'interférence

Pour pouvoir exprimer analytiquement l'intérêt de l'étalement de spectre, définissons certains paramètres

- $S [W]$ le niveau de puissance du signal utile, égal au produit de l'énergie par bit et de la fréquence d'émission des bits,
- $B [Hz]$ la largeur du canal spectral disponible,
- $R_b = \frac{1}{T_b} [Hz]$ le débit utile ou la fréquence bit du message à transmettre,
- $E_b [J = W \times s]$ l'énergie par bit,
- $I [W]$ le niveau de puissance des signaux d'interférence (celui-ci inclus tous les types d'interférences), et
- $N_0 [W/Hz]$ la densité spectrale de bruit.

On peut interpréter le rapport suivant comme un rapport du niveau d'interférence à signal utile

$$\frac{I}{S} = \frac{N_0 B}{E_b / T_b} = \frac{B T_b}{E_b / N_0} = \frac{B / R_b}{E_b / N_0} \quad (6.27)$$

Dès lors qu'on se fixe un rapport énergie à bruit requis au récepteur $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{req}$ pour que le système fonctionne correctement, on dispose d'une marge qui, en $[dB]$, s'exprime par

$$\frac{I}{S} [dB] = \frac{B}{R_b} [dB] - \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{req} [dB] \quad (6.28)$$

Le rapport $\frac{I}{S}$ est appelé *marge d'interférence* tandis que le rapport $\frac{B}{R_b}$ est le *gain d'étalement*. En effet,

$$\frac{B}{R_b} = \frac{T_b}{T_c} \quad (6.29)$$

Pour un gain d'étalement unitaire, la valeur du rapport $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ est tout simplement égale au rapport signal S à interférence I .

Exemple. Soit à transmettre un signal vocal numérique à une cadence bit de $9600 [Hz]$. Prenons ensuite une largeur de canal de $B = 1,2288 [MHz]$ telle qu'utilisée dans le système américain à étalement de spectre IS-95. Pour un rapport énergie à bruit requis de $6 [dB]$, ce qui correspond à une certaine probabilité d'erreur, on calcule une marge de

$$10 \log \left(\frac{1,2288 \times 10^6}{9600} \right) - 6 = 15,1 [dB] \quad (6.30)$$

En conclusion, les bits d'information à la sortie du récepteur peuvent être détectés de manière fiable même lorsque le bruit ou les interférences à l'entrée du récepteur sont majorés de $15,1 [dB]$.

Cette marge disponible va donc permettre de rajouter des utilisateurs sans hypothéquer la qualité de la communication.

L'étalement a toutefois ses limites car il faut bien borner la valeur de N . Pour accroître davantage encore le nombre d'utilisateurs, il est nécessaire de recourir à une technique d'étalement de spectre avec saut de fréquence.

6.3.4 Capacité d'un système à étalement de spectre

C'est une règle générale que l'utilisation d'une bande de fréquence plus large accroît la résistance au bruit. Dès lors qu'un utilisateur est seul à utiliser un large canal, il bénéficiera d'une qualité de transmission idéale. Une telle situation est néanmoins rare car elle entraîne un gaspillage de ressources qui ne se justifie pas. En pratique donc, un utilisateur partage le canal avec d'autres utilisateurs. Le nombre d'utilisateurs simultanés dans une même bande de fréquence est appelée *capacité*. La proposition suivante établit un résultat important pour le calcul de la capacité des techniques d'étalement de spectre.

Proposition 24 *La capacité d'un système à étalement de spectre est proportionnelle au gain d'étalement.*

Pour l'établir, supposons qu'un utilisateur soit le seul à occuper la bande de fréquences. La puissance de porteuse est alors $C = S = E_b/T_b = R_b E_b$. De la même manière, la puissance de bruit à l'entrée de la station de base vaut

$$I = BN_0 \quad (6.31)$$

Dès lors, le rapport de la puissance de porteuse d'un mobile à l'entrée de la station de base vaut

$$\frac{C}{I} = \frac{R_b E_b}{BN_0} = \frac{E_b/N_0}{B/R_b} \quad (6.32)$$

Soit M le nombre de mobiles traités par la cellule. En supposant que tous les émetteurs travaillent à même niveau de puissance et en négligeant le bruit thermique, les autres mobiles produisent une puissance d'interférence

$$I = C(M - 1) \quad (6.33)$$

ce qui conduit à

$$\frac{C}{I} = \frac{1}{M - 1} \quad (6.34)$$

En combinant les deux expressions de $\frac{C}{I}$, on en déduit

$$M = \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} + 1 \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \quad (6.35)$$

On voit donc que la capacité de la cellule est bien proportionnelle au gain d'étalement $\frac{B}{R_b}$. M est donc approximativement égal à la marge d'interférence. Dans l'exemple du paragraphe précédent, on observe un nombre d'utilisateurs égal à $M = 10^{1,51} \approx 32$. On voit dès lors que, plus on veut mettre des utilisateurs sur la même bande de fréquences pour une même probabilité d'erreur, plus le gain d'étalement doit être important et donc plus B doit être élevé par rapport à R_b , et donc, plus T_c doit être petit par rapport à T_b . Une interprétation intéressante est montrée à la figure 6.13 ; la puissance de l'utilisateur ramenée dans une bande large de W [Hz] dépasse largement la puissance d'interférence des autres utilisateurs.

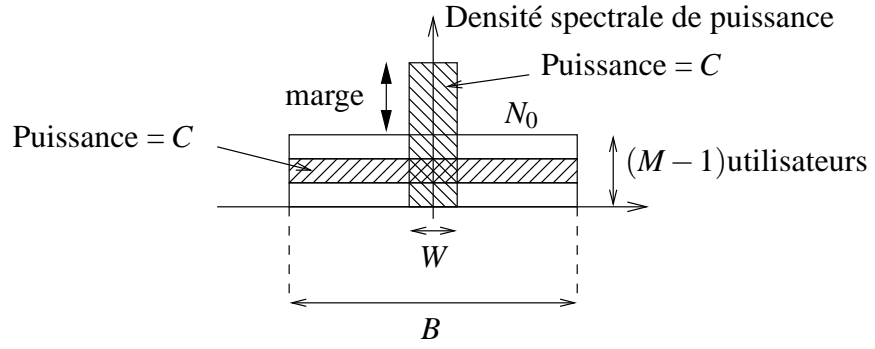


FIG. 6.13 – Interprétation de l'étalement de spectre.

Mais on peut encore faire d'autres gains permettant d'augmenter le nombre d'utilisateurs sur une cellule. En effet, lors d'une conversation, les temps morts occupent une partie non négligeable du temps total. Des études ont montré que le temps de conversation est de l'ordre de 35% du temps total de la communication. Comme, en pratique, on ne coupe pas instantanément le message dès détection d'un silence, on considère plutôt un facteur d'occupation α de 50%, ce qui statistiquement mène à un nombre d'utilisateurs simultanés

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} \quad (6.36)$$

À ce dernier calcul s'ajoute une autre considération relative à la directivité des antennes. Pour une même cellule, on place généralement plusieurs antennes (typiquement trois), chacune ayant une directivité telle qu'elle est responsable de la couverture d'une portion de la cellule, ce qui divise la zone de rayonnement de la cellule en plusieurs secteurs. Ceci permettrait d'augmenter le nombre d'utilisateurs dans une même cellule par un facteur trois, mais pour éviter un trou de couverture, on assure un certain recouvrement (par exemple 15%). Le tout amène un gain G supplémentaire, égal à $3 \times 0,85$, conduisant à une valeur de M de

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} G \quad (6.37)$$

Enfin, considérant trois cellules trisectorielles, la technique de CDM implique l'utilisation des mêmes fréquences pour toutes les cellules (on utilise toute la bande passante), ce qui implique un certain recouvrement qui se traduit par un facteur de réutilisation de fréquence F_e inférieur à l'unité.

$$F_e = \frac{\text{Surface utile}}{\text{Surface géographique totale}} \quad (6.38)$$

Ce qui donne l'estimation suivante pour le nombre d'utilisateurs par cellule

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} G F_e \quad (6.39)$$

Pour le GSM, $F_e \simeq 1$.

Chapitre 7

Multiplexage et accès au multiplex

7.1 Introduction

La paire torsadée qui relie un abonné au central téléphonique est habituellement dédiée à un utilisateur unique¹. Cet utilisateur peut dès lors, à sa guise et à toute heure, utiliser la totalité du spectre fréquentiel ; par ailleurs, la technologie ADSL en tire profit. Cette souplesse a un prix car, la ligne restant inactive pendant une très longue période, l'utilisation moyenne de quelques dizaines de minutes par jour doit suffire à rentabiliser l'investissement consenti par l'opérateur.

7.1.1 Multiplexage

Dans l'air ou sur un réseau de télédistribution, le partage du spectre et le partage temporel des ressources font partie intégrante du dimensionnement du réseau. Ces partages résultent de procédés de multiplexage qui consistent à combiner plusieurs signaux pour les transmettre sur un même support.

Historiquement, on en distingue principalement deux :

- le *multiplexage en fréquences* (*Frequency Division Multiplexing* - FDM). Cette technique de multiplexage alloue une bande de fréquences spécifique à chaque signal.
- le *multiplexage temporel* (*Time Division Multiplexing* - TDM). Il consiste à réguler les moments d'occupation du canal pour chaque signal.

La technique plus récente du *multiplexage par étalement de spectre* a ouvert de nouvelles voies pour le partage de ressources. Cette technique réalise à la fois un partage fréquentiel et temporel.

Pour être complet, signalons qu'il existe des techniques de multiplexage propres à certains supports. Ainsi, dans le domaine de la transmission par fibre optique, on a développé des techniques de multiplexage par longueurs d'onde (*Wave Division Multiplexing* - WDM) avec quelques variantes particulièrement adaptées à la transmission à très haut débit (*Dense Wave Division Multiplexing* - DWDM) .

7.1.2 Accès multiple

Dès lors qu'il y a multiplexage et donc partage des ressources, il convient de définir

- des moyens techniques pour accéder à ces ressources individuelles. On parle de *méthodes d'accès* telles que le FDMA (la lettre A désignant *Access*), TDMA, CDMA, ...

¹Dans de très rares cas, il existe des concentrateurs de lignes qui combinent des signaux entre les abonnés et le central téléphonique.

- des *stratégies pour disposer du canal*. C'est par le biais de stratégies qu'on espère atteindre au haut de performance (haut débit, faible délai, faible taux de congestion, ...). La question des stratégies ne sera pas abordée ici.

7.2 Multiplexage par répartition en fréquences

7.2.1 Principe

L'utilisation de certains supports de transmission exige un partage adéquat des ressources fréquentielles. La technique de multiplexage par répartition en fréquences consiste à former un signal composite par translation fréquentielle de certains signaux. La figure 7.1 en illustre le principe. On dispose

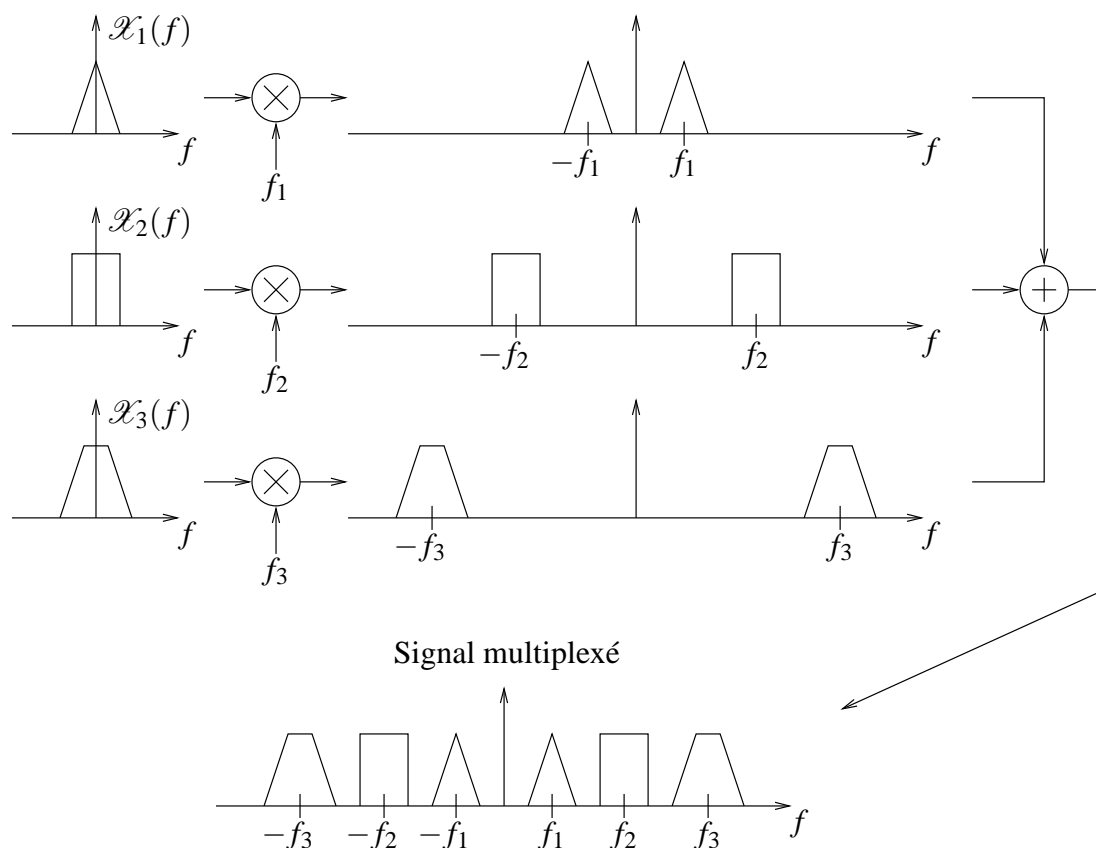


FIG. 7.1 – Principe du multiplexage en fréquence.

d'une série de signaux $X_i(f)$ en bande de base à transmettre simultanément. Au moyen de mélangeurs accordés à des fréquences spécifiques, le spectre de chaque signal est déplacé le long de l'axe des fréquences et ajouté au signal multiplexé de manière à couvrir une certaine plage fréquentielle, tout en évitant un chevauchement en ménageant des *bandes de garde* entre les signaux.

Le signal multiplexé est transmis au récepteur qui doit extraire un à un tous les signaux au moyen de mélangeurs accordés aux mêmes fréquences qu'à l'émission. Le principe est identique à celui d'une démodulation cohérente (voir figure 7.2).

7.2.2 Bande passante

La bande totale du signal est la somme des bandes des signaux augmentée de *bandes de garde* destinée à protéger le multiplex ainsi constitué des signaux voisins.

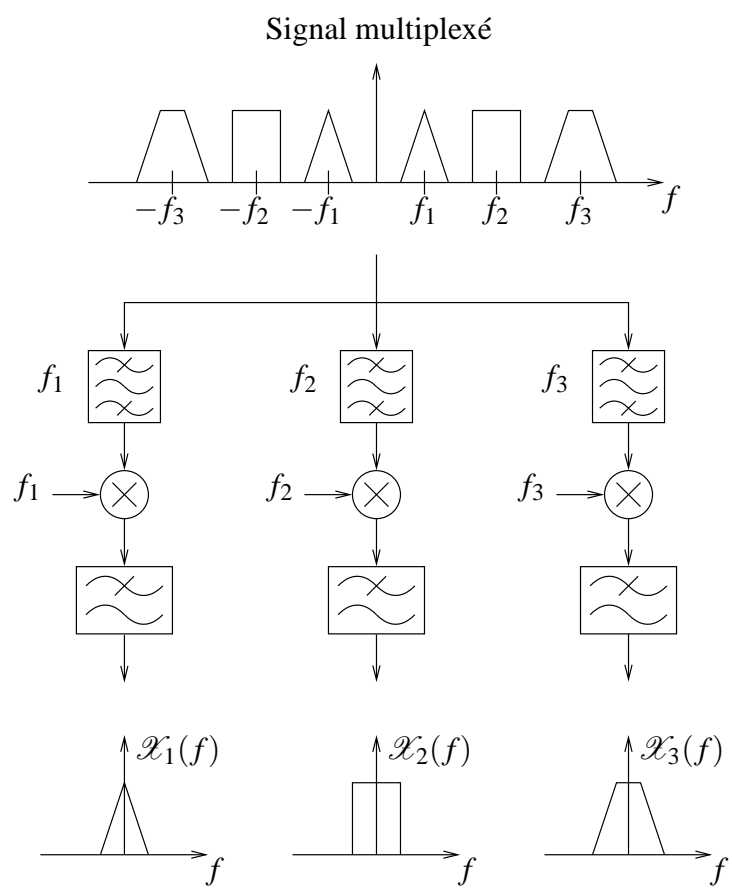


FIG. 7.2 – Principe du démultiplexage en fréquence.

La borne inférieure de la bande passante est fournie par la somme des bandes des messages constituant. Ainsi, soit W la bande totale et W_i les bandes individuelles,

$$W > \sum_i W_i \quad (7.1)$$

7.2.3 Accès au multiplex

La question de l'accès (FDMA) est relativement simple car c'est la fréquence porteuse du signal W_i dans le multiplex qui permet de sélectionner un signal. Cette allocation est généralement statique. Le partage fréquentiel des ressources est illustré à la figure 7.3.

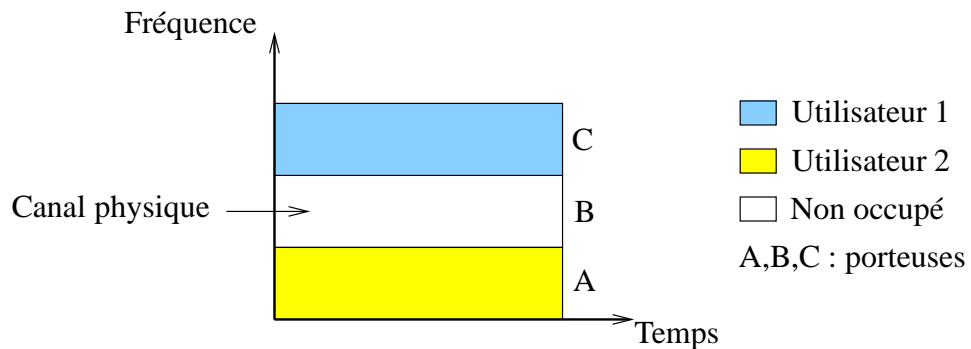


FIG. 7.3 – Partage des ressources par multiplexage en fréquence : le FDMA (*Frequency Division Multiple Access*).

7.2.4 Exemple : multiplex de téléphonie analogique entre centraux

En téléphonie, avant l'introduction du numérique, le moyen le plus économique de transmettre des signaux analogiques sur de longues distances a consisté à assembler des signaux modulés en amplitude à bande latérale unique par multiplexage fréquentiel. Le CCITT² a ainsi défini des normes pour l'assemblage de 12 jusqu'à pas moins de 10.000 canaux vocaux. Dans ces schémas, on réserve un canal large de 4 [kHz] pour un signal vocal occupant une bande de $300\text{ à }3400\text{ [Hz]}$. Ce schéma est illustré à la figure 7.4.

Le groupe de base est constitué suivant la règle

$$f_c = 60 + 4n\text{ [kHz]}, \quad n \in \{1, \dots, 12\} \quad (7.2)$$

où chaque signal est modulé par une modulation à bande latérale résiduelle. Les groupes sont ensuite rassemblés pour former des super-groupes et ainsi de suite. Le second échelon de la hiérarchie est représenté à la figure 7.5.

7.3 Multiplexage par répartition temporelle

7.3.1 Principe

Le multiplexage par répartition temporelle (TDM, *Time Division Multiplexing*) est une technique de traitement de données par mélange temporel ayant pour but de permettre l'acheminement sur

²Le CCITT est l'ancien nom de l'ITU section T.

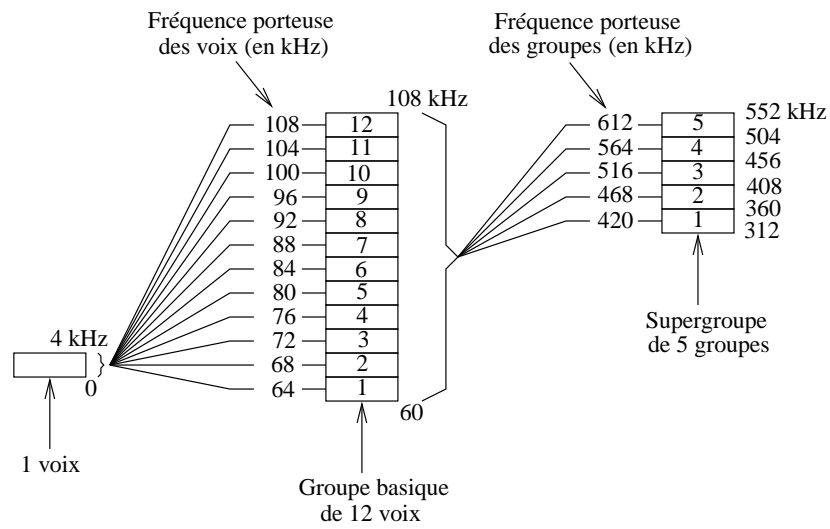


FIG. 7.4 – Les étapes de constitution d'un groupe de base et d'un super-groupe.

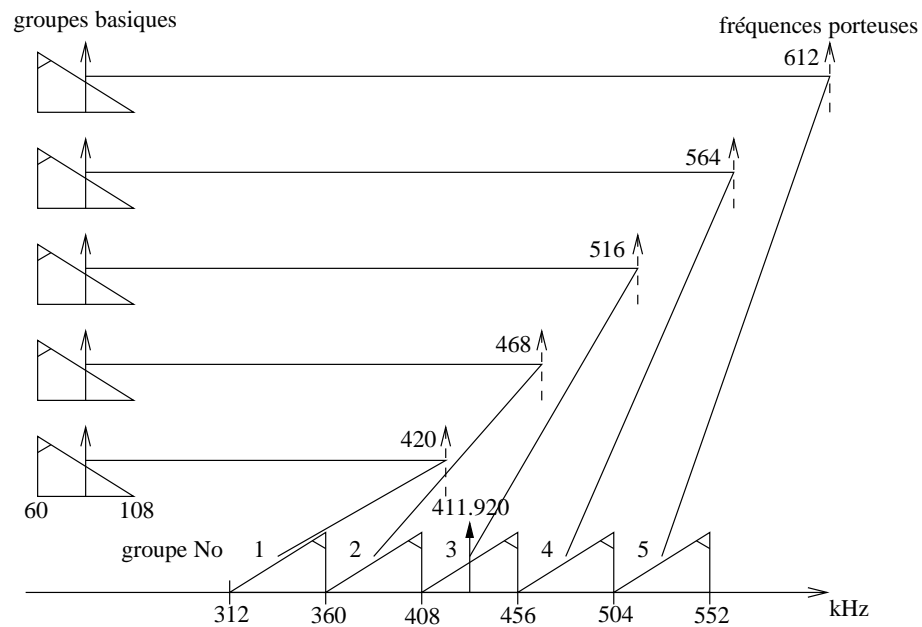


FIG. 7.5 – Constitution de super-groupes [18, page 122].

un même canal (appelé *voie haute vitesse HV*), un ensemble d'informations provenant de différents canaux à faibles débits (appelés *voies basses vitesses BV*) lorsque celles-ci doivent communiquer simultanément d'un même point de départ à un même point d'arrivée. Le principe est illustré à la figure 7.6.

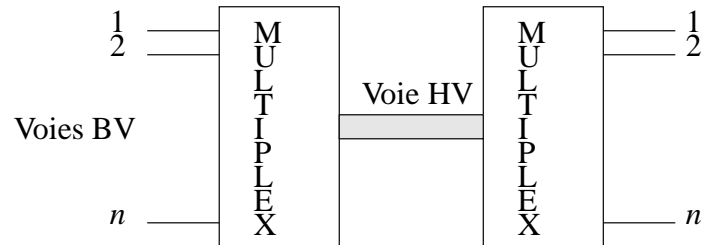


FIG. 7.6 – Schéma de multiplexage temporel.

À l'autre bout de l'acheminement, un démultiplexeur opère à l'inverse. Ce multiplexage est dit *temporel* dans la mesure où les données correspondant à chaque voie sont intercalés dans le temps. Ainsi circulent séquentiellement et cycliquement sur la voie HV des informations appartenant à différentes sources (cf. figure 7.7).

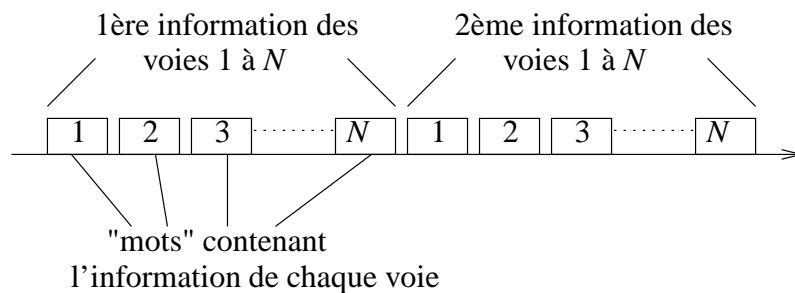


FIG. 7.7 – Structure temporelle de multiplexage par répartition temporelle des ressources.

Le multiplexage peut être effectué soit après l'opération d'échantillonnage de chaque voie et avant le codage, soit après celui-ci.

Lors du démultiplexage des voies, c'est-à-dire de la ré-affectation des données en fonction de leur source d'origine, il faut que l'on puisse distinguer les différents échantillons. Pour cela, on intercale dans la succession de données un *mot de repère*, dont l'occurrence est égale à la période d'échantillonnage (figure 7.8).

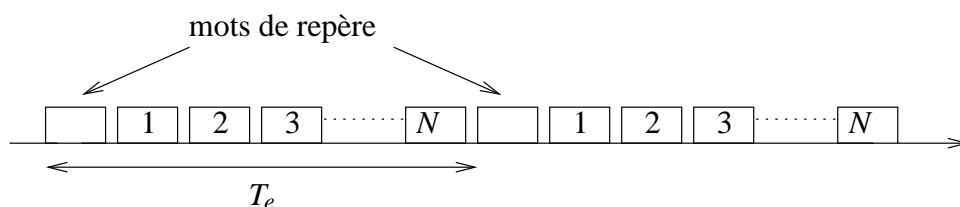


FIG. 7.8 – Mot de repère.

L'ensemble constitué du mot de repère et de l'information de même rang pour toutes les voies est appelé *trame*. Sa durée est égale à T_e .

7.3.2 Bande passante

Le multiplexage par répartition temporelle s'analyse le plus facilement en considérant la figure 7.9(a). On suppose que toutes les sources d'information sont échantillonnées à la fréquence de NYQUIST ou à une fréquence supérieure. Un commutateur entrelace les données suivant un ordre préétabli. Le même ordre permet de désentrelacer les données.

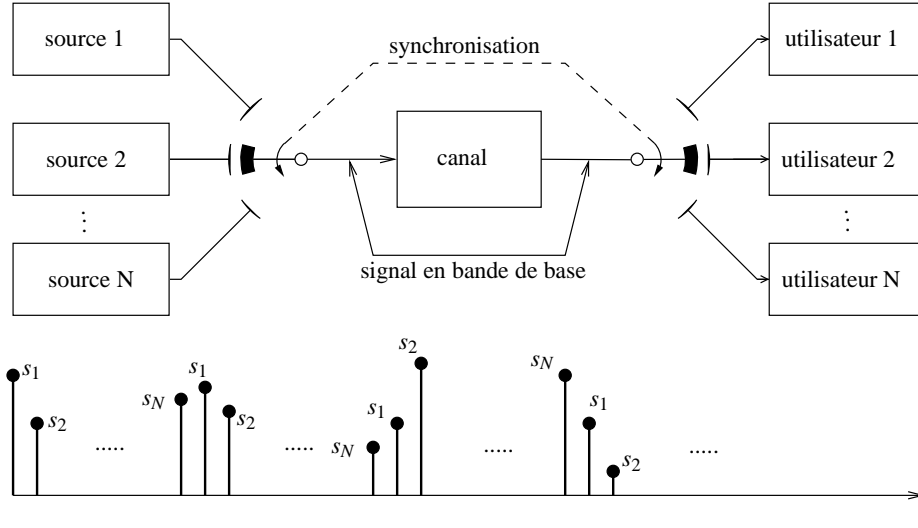


FIG. 7.9 – Schéma de multiplexage temporel.

Si tous les signaux sont échantillonnés à une même fréquence, le commutateur passe régulièrement d'un signal à l'autre. Dans le cas de signaux échantillonnés à des fréquences différentes, les signaux les plus larges en bande de base prennent une partie plus significative du multiplex.

La bande de base minimale pour un système TDM se détermine aisément. Supposons que l'on travaille à la fréquence de NYQUIST pour tous les signaux. Pendant l'intervalle de temps T , le signal i fournit $2W_iT$ échantillons. Le total pour tous les signaux vaut donc

$$n_s = \sum_i 2W_iT \quad (7.3)$$

Si le signal final est en bande de base et que cette bande vaut W , il faut impérativement $2W$ échantillons au moins pour le caractériser. Pour l'intervalle T , on a donc

$$n_s = 2WT = \sum_i 2W_iT \quad (7.4)$$

Dès lors,

$$W = \sum_i W_i \quad (7.5)$$

ce qui est rigoureusement identique au cas du multiplexage FDM.

7.3.3 Accès au multiplex

Tout comme pour le FDM, l'accès est généralement statique. Néanmoins, le TDM offre un moyen aisé de transmettre des informations individuelles à des débits différents. Le schéma d'accès doit alors être convenu entre l'extrémité émettrice et l'extrémité réceptrice. Le schéma de partage par répartition temporelle est illustré à la figure 7.10.

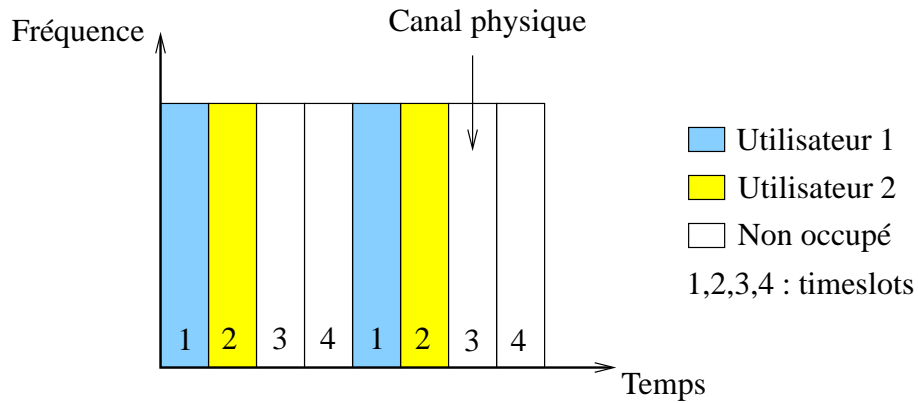


FIG. 7.10 – Partage des ressources par multiplexage en temps : le TDMA (*Time Division Multiple Access*).

7.3.4 Exemple de multiplexage temporel : système téléphonique numérique PCM 30 voies européen

Caractéristiques

- Il permet de transmettre simultanément sur un même support 30 voies téléphoniques classiques :
- B = bande passante du signal à coder = $300 - 3400 [Hz]$ et $f_e = 8 [kHz]$.
 - numérisation PCM avec loi A (=87,6) de compression 13 segments sur 8 bits, D_{bv} = débit basse vitesse = $64 [kb/s]$.
 - multiplexage temporel à 32 intervalles de temps (IT) comprenant un IT de verrouillage de trame (VT) et un IT de signalisation (SI).

Structure de la trame

Elle est découpée en 32 IT, chacun composé d'un octet (8 bits), numérotés de 0 à 31 (figure 7.11).

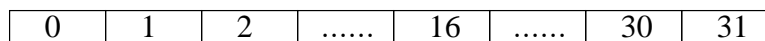


FIG. 7.11 – Structure de la trame.

La période d'échantillonnage $T_e = 1/f_e = 125 [\mu s]$, correspond à la durée de la trame. Chaque IT possède une durée égale à $t_{IT} = \frac{125}{32} = 3,9 [\mu s]$. Chaque bit dure $T_b = \frac{3,9}{8} = 488 [ns]$. Ces valeurs sont représentées à la figure 7.12.

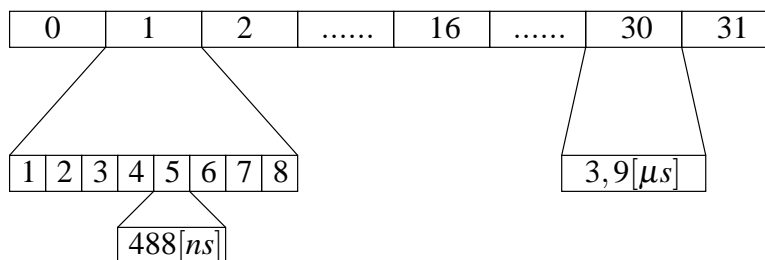


FIG. 7.12 – Structure de la trame au niveau bit.

Le débit de la voie HV composée de 30 voies est donc $D = 32 \times 8 \times 8 = 2048 [kb/s] = 2,048 [Mb/s]$. On parle de trame à $2 [Mb/s]$

Rôle des IT

- Les IT de 1 à 15 et 17 à 31 sont affectés aux voies de parole téléphonique ou à la transmission numérique (données, fax, ...). Ils ont chacun un débit de 64 [kb/s].
- L'IT0 contient le mot de repère évoqué précédemment, appelé *mot de verrouillage de trame*, et noté VT. Il ne joue pas le même rôle selon qu'il se situe dans une trame *paire* ou *impaire*. Le verrouillage de trame permet de synchroniser les équipements de réception sur le cycle des données émises à la mise en marche du système, puis d'une manière périodique afin de vérifier le *synchronisme* du fonctionnement général. Dans ce cas précis, on parle de verrouillage *regroupé*, c'est-à-dire dont les informations sont groupées dans un même IT en tête de trame. Il existe un autre type de verrouillage dit *réparti* si le mot possède des informations localisées dans plusieurs IT différents, ou bien sur plusieurs trames différentes.
- L'IT16 est réservé à la *signalisation* des 30 voies. Celle-ci a pour but de transmettre les informations relatives ou pas aux données (maintenance des systèmes, tests, commandes, gestion du réseau...), pour la commande des opérations de commutation. Elle est ici de type "*hors octet regroupé*", c'est-à-dire regroupé dans l'IT 16. Chaque IT16 a pour rôle la signalisation simultanée de deux voies. Il faut donc 15 IT16, soit 15 trames, pour signaler toutes les voies de données. L'ensemble de ces 15 trames, auxquelles on ajoute une 16-ième trame appelée trame 0, constitue une multitrame. Cette trame 0 comprend dans l'IT16 un mot de repère, appelé mot de verrouillage multitrame (VMT) nécessaire lors du multiplexage à la synchronisation des trames. Il occupe les quatre premiers bits de cet IT (figure 7.13).

7.4 Multiplexage par répartition de codes

Le principe de base est celui de l'étalement de spectre. Le multiplexage par répartition de codes ne nécessite ni une allocation fixe des fréquences comme en FDM, ni un séquençement strict comme en TDM, comme le montre la figure 7.14.

Le facteur limitatif le plus important est celui des intercorrélations entre utilisateurs dès lors que les utilisateurs recourent à des codes distincts. Considérons, pour l'analyse, la situation de la figure 7.15.

On prend le cas le plus défavorable de deux utilisateurs i et j parfaitement en phase et travaillant à la même fréquence. On cherche à déterminer l'effet d'interférence dû à l'utilisateur i à la sortie du récepteur j . Soit $b_i(t)$ la séquence (en forme bipolaire $-1, +1$) de l'utilisateur i . Soit un décalage τ entre les horloges de référence des deux utilisateurs. On montre aisément que l'interférence de i à l'entrée de l'organe de décision de j vaut

$$v_j(\tau)|_{b_j(t)=0} = \int_0^{T_b} b_i(t-\tau) c_j(t) c_i(t-\tau) dt \quad (7.6)$$

$$= \pm \int_0^{T_b} c_j(t) c_i(t-\tau) dt \quad (7.7)$$

On peut choisir de réécrire cette équation sous la forme

$$v_j(\tau)|_{b_j(t)=0} = \pm T_b \Gamma_{ji}(\tau) \quad (7.8)$$

où

$$\Gamma_{ji}(\tau) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} c_j(t) c_i(t-\tau) dt \quad (7.9)$$

Cette moyenne temporelle est appelée *fonction d'intercorrélation partielle*. Pour avoir une interférence nulle, il faudrait que cette fonction soit nulle pour toute valeur τ . En général, les séquences

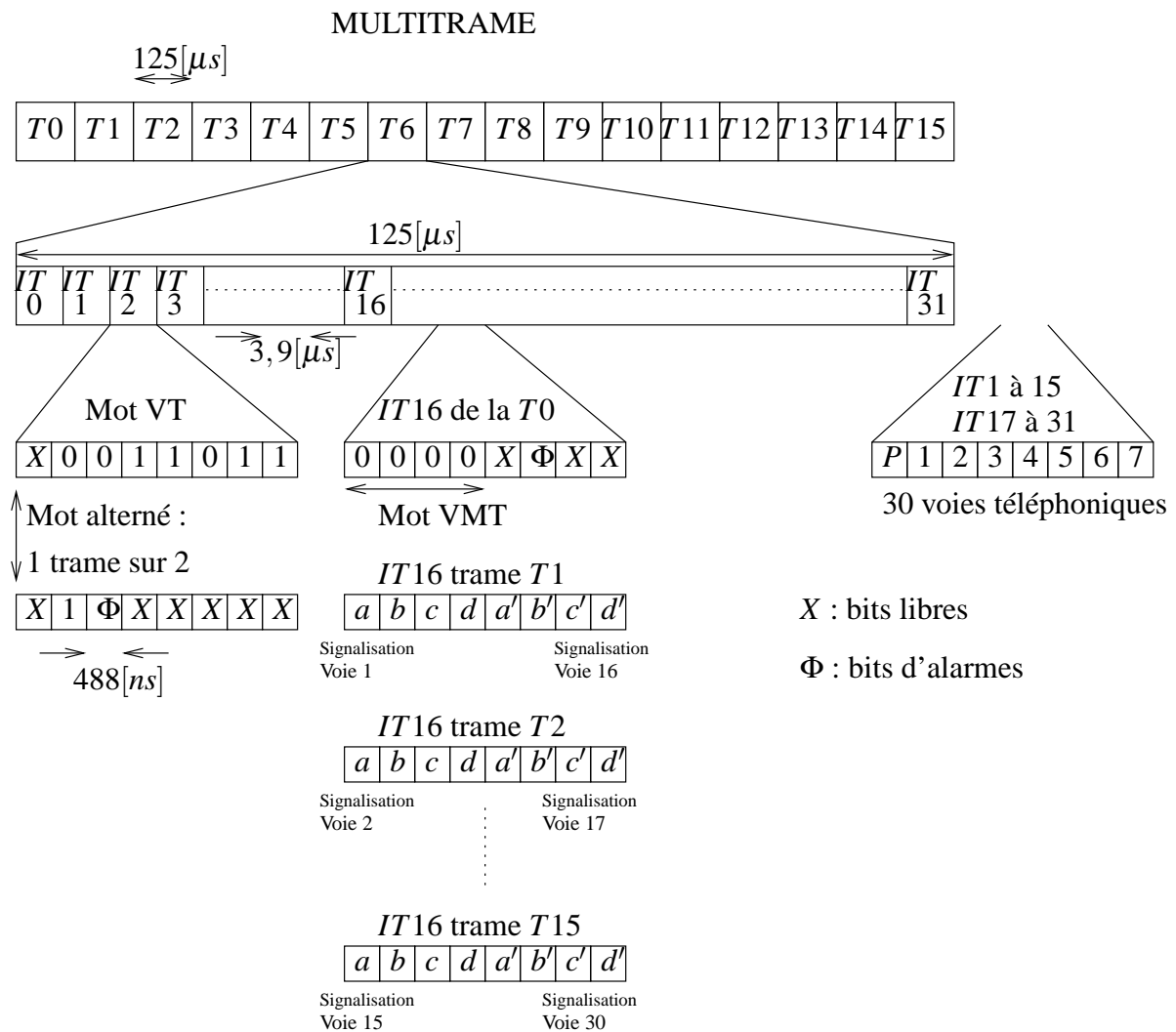


FIG. 7.13 – Multiframe (d'après [10]).

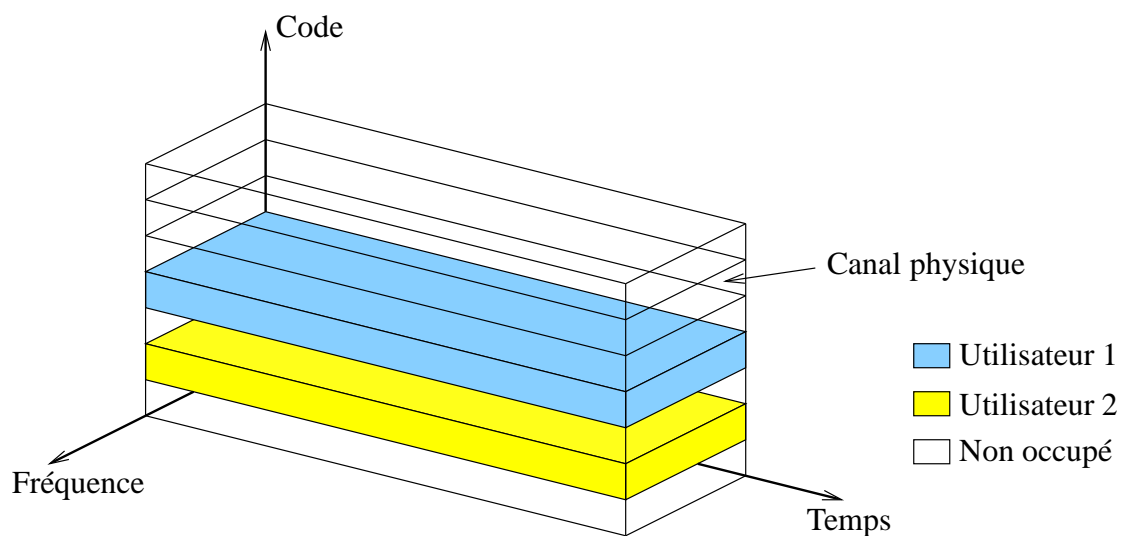


FIG. 7.14 – Multiplexage de ressources par répartition de code (*Code Division Multiple Access*).

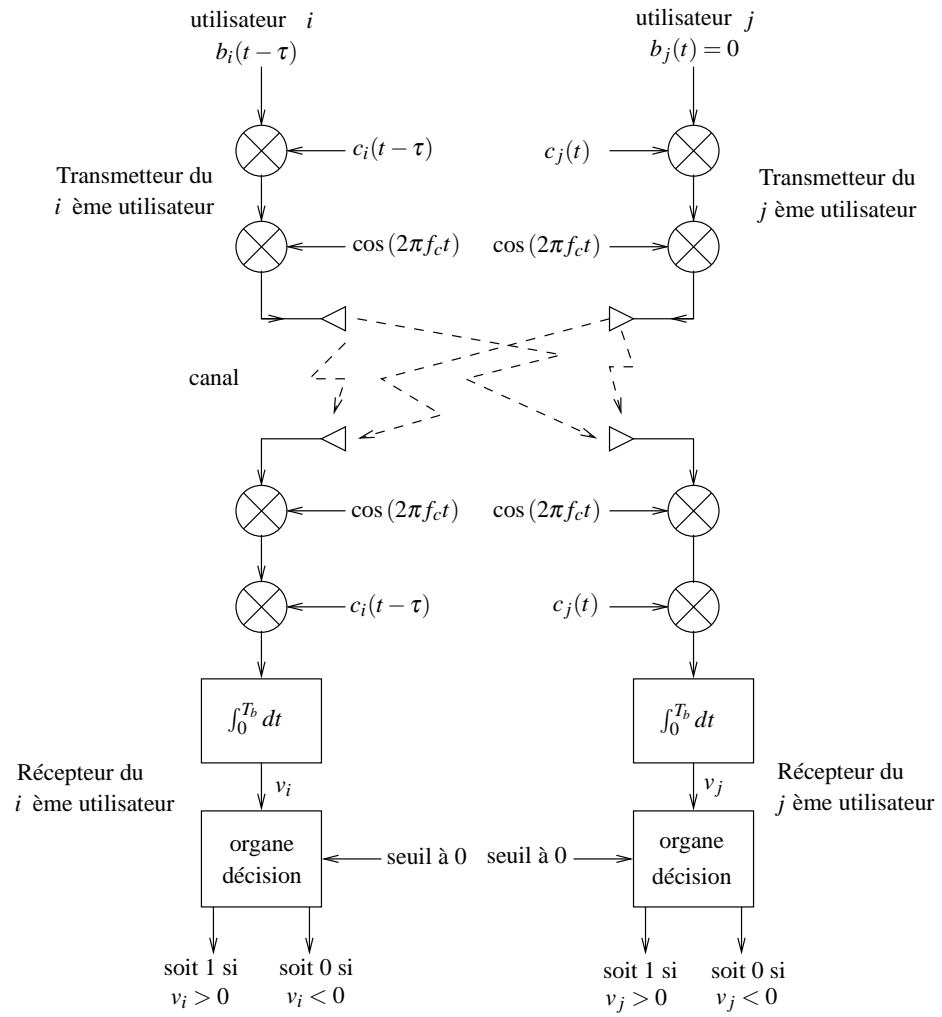


FIG. 7.15 – Schéma d'analyse pour l'intercorrélation des séquences étalées.

à longueur maximale n'ont pas de bonnes propriétés d'intercorrélation partielle comme le montre la figure 7.16 ; la fonction d'intercorrélation est loin d'être nulle pour toute valeur de τ .

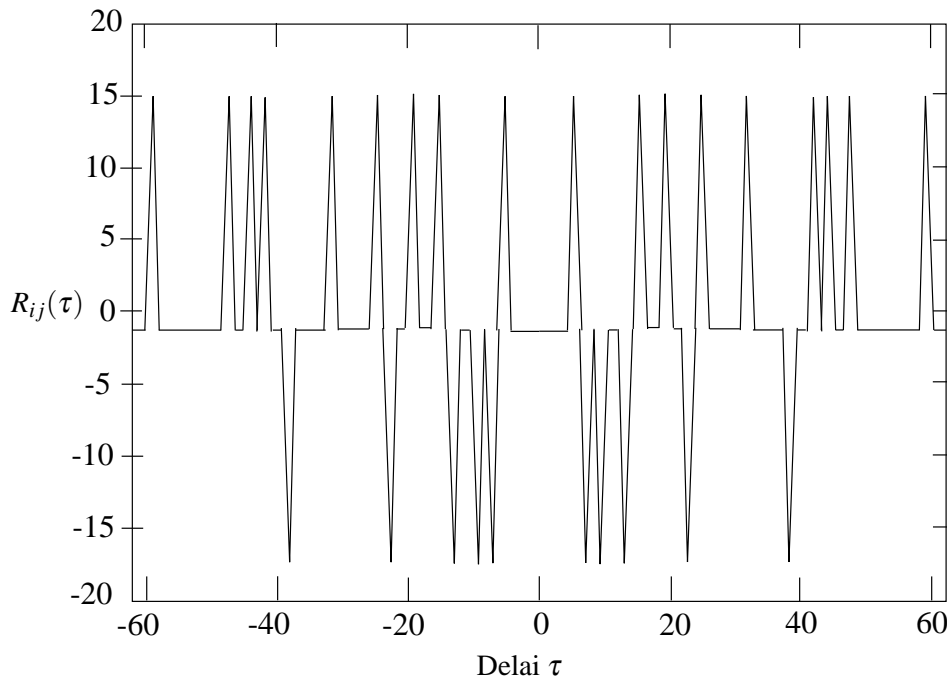


FIG. 7.16 – Fonction d'intercorrélation de deux séquences pseudo-aléatoires de période $N = 63$ ($[6, 1]$ et $[6, 5, 2, 1]$) (d'après [16, page 608]).

7.4.1 Séquences de GOLD

En pratique, les séquences à longueur maximale sont de piètres candidats pour une utilisation partagée. On utilise plutôt une classe de codes particulière appelée séquences de GOLD. Il est possible de montrer qu'un choix précis des séquences à longueur maximale conduit à des séquences de GOLD dont la fonction d'intercorrélation n'a que trois valeurs distinctes.

Le bon sens impose que chaque utilisateur ait son propre code. On peut néanmoins montrer [17, page 128] qu'à la condition d'avoir des émetteurs dont les phases sont non corrélées, la transmission est possible en présence d'utilisateurs recourant tous à un code unique.

7.5 Discussion

7.5.1 Combinaison de techniques de multiplexage

Les techniques de multiplexage ne sont pas nécessairement utilisées isolément. En effet, dans le cas pratique du GSM, l'opérateur alloue une série de canaux fréquentiels. Ces canaux sont ensuite partagés entre utilisateurs par multiplexage à répartition temporelle. On parle de technique FD/TDMA. Un tel schéma est illustré à la figure 7.17. De plus, il y a séparation des bandes de fréquence suivant que le signal va de la station de base vers l'utilisateur ou l'inverse. Cette technique est parfois appelée FDD/TDD (le second D signifiant Duplex).

Dans le cas du standard américain IS-95, le multiplexage temporel est remplacé par un multiplexage par spectre étalé ; il s'agit alors de FD/CDMA.

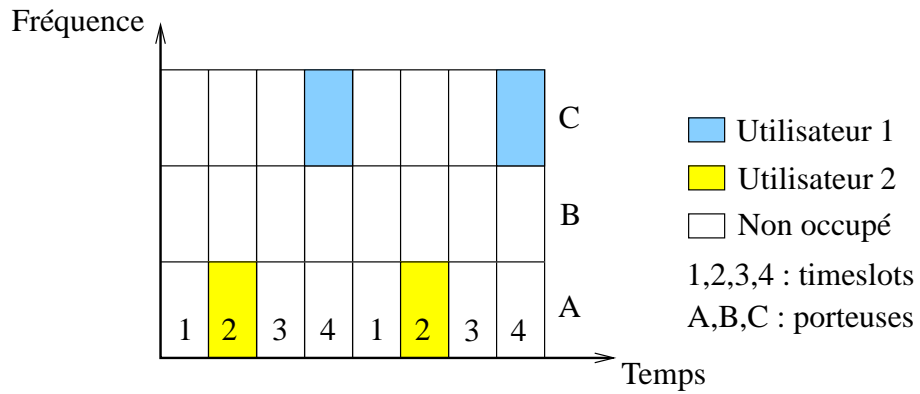


FIG. 7.17 – Partage de ressources par multiplexage en temps et en fréquence, combinaison du TDMA et du FDMA.

7.5.2 Comparaison de normes de mobiloophonie

Le tableau 7.1 compare les principaux standards de communications pour mobiles.

Système	GSM	DCS-1800	IS-54	IS-95 (DS)
Mode d'accès	TDMA/FDMA	TDMA/FDMA	TDMA/FDMA	CDMA/FDMA
Bande de fréquence				
Montée (Mhz)	935-960	1710-1785	869-894	869-894
Descente (Mhz)	890-915	1805-1880	824-849	824-849
	(Europe)	(Europe)	(USA)	(USA)
Espacement des canaux				
Descente (kHz)	200	200	30	1250
Montée (kHz)	200	200	30	1250
Modulation	GMSK	GMSK	$\pi/4$ DQPSK	BPSK/QPSK
Puissance du mobile				
Max./Moyenne	1W/125mW	1W/125mW	600mW/200mW	600mW
Codage de voix	RPE-LTP	RPE-LTP	VSELP	QCELP
Débit voix (kb/s)	13	13	7,95	8 (var.)
Débit binaire canal				
Montée (kb/s)	270,833	270,833	48,6	
Descente (kb/s)	270,833	270,833	48,6	
Trame (ms)	4,615	4,615	40	20

TAB. 7.1 – Comparaison de standards de communication pour mobiles.

Chapitre 8

Étude du trafic

8.1 Introduction

La difficulté majeure de l'exploitation d'un réseau consiste en son dimensionnement. En effet, tout est question de compromis entre le risque de blocage dû à une occupation de toutes les ressources et le coût qu'entraîne un sur-dimensionnement d'un réseau.

Le réseau téléphonique est critique du point de vue de la gestion du trafic, en raison de sa structure de réseau commuté (cf. illustration à la figure 8.1). En effet, une communication occupe une voie de bout en bout pour la totalité de la durée d'un appel. Il faut donc éviter qu'un commutateur n'ait plus aucun circuit disponible lors de l'établissement d'un nouvel appel.

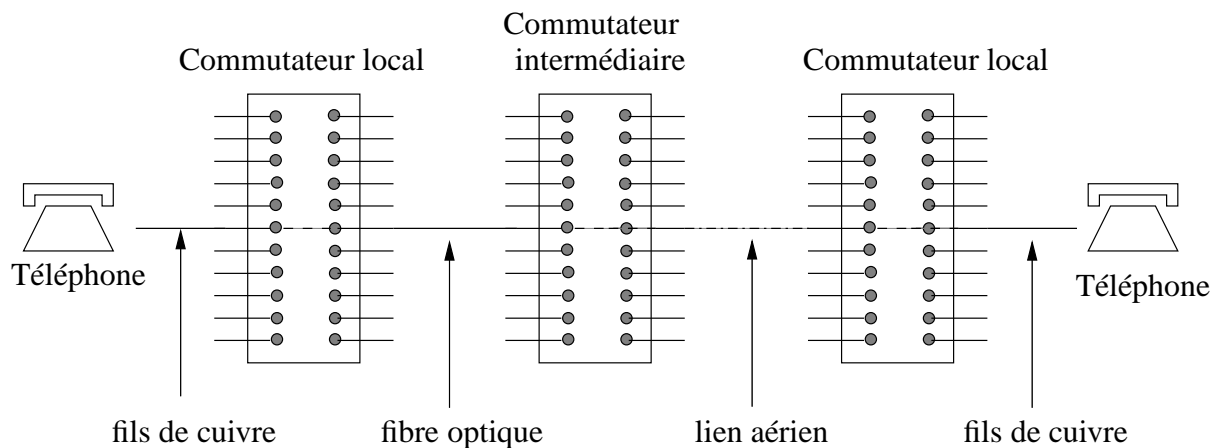


FIG. 8.1 – Structure d'un réseau commuté

La question ne pourra se résoudre qu'en termes statistiques. Il semble en effet impensable de fournir une ligne à chaque utilisateur. En général, on met en place N lignes, dont le nombre est nettement inférieur au nombre d'utilisateurs, que les différents utilisateurs doivent se partager. Il arrive alors qu'un utilisateur, voulant accéder au réseau, trouve toutes les lignes occupées. Ce phénomène s'appelle *congestion* du réseau. Toute la problématique du dimensionnement du réseau est donc de déterminer le nombre de lignes N à installer pour que la probabilité de congestion du réseau soit inférieure à une certaine probabilité (par exemple 0,01 ou 0,02). Pour cela, on devra tenir compte de la manière dont les utilisateurs utilisent le réseau, par exemple, en prenant en compte le nombre moyen d'appels observés pendant un certain laps de temps et la durée moyenne des appels.

Ce chapitre traite principalement le cas d'un faisceau entre deux commutateurs. Le dimensionnement d'un réseau de commutateurs interconnectés relève d'une analyse approfondie du trafic et d'une réelle optimisation des ressources.

8.1.1 Caractérisation du trafic

Une classification simple des techniques d'analyse du trafic différencie les *systèmes à perte* et les *systèmes à délai*. Dans un système à perte, une tentative d'appel survenant lors d'une congestion est ignorée. Un système à délai mémorise les appels excédentaires dans une queue jusqu'à la libération d'une ressource.

Une communication téléphonique nécessite l'établissement d'un *circuit*. Un circuit est un chemin de commutation fixe pour la totalité de la durée de la communication. Il doit être établi, maintenu et relâché en fin de communication. L'établissement et le relâchement de la communication s'effectuent au moyen de signaux de *signalisation*. La gestion du trafic téléphonique se fait généralement par un système à perte¹.

Contrairement à une communication téléphonique, les données (Internet, ...) sont envoyées par un mécanisme de *transmission par paquets*. Les routeurs, centres de commutation pour les paquets d'information Internet, gèrent une mémoire limitée, organisée en plusieurs queues. La gestion de ces queues est complexe et elle introduit un délai aléatoire de transmission. Il arrive également qu'un routeur supprime certains paquets en raison d'un manque de ressources.

Intensité, trafic et charge : quelles mesures ?

Un réseau téléphonique est constitué de deux types de lignes :

- les lignes où vont transiter les communications ou les données,
- les lignes où va transiter la signalisation nécessaire à l'établissement de la liaison entre deux terminaux.

Pour le dimensionnement, on ne considère que les lignes transportant l'information des utilisateurs (à l'exclusion des lignes utilisées par exemple pour la gestion du réseau ou la signalisation). On supposera disposer d'un faisceau à N canaux entre deux commutateurs (cf. figure 8.2). Le dimensionnement consiste à trouver une relation entre la charge du réseau et la probabilité de congestion.

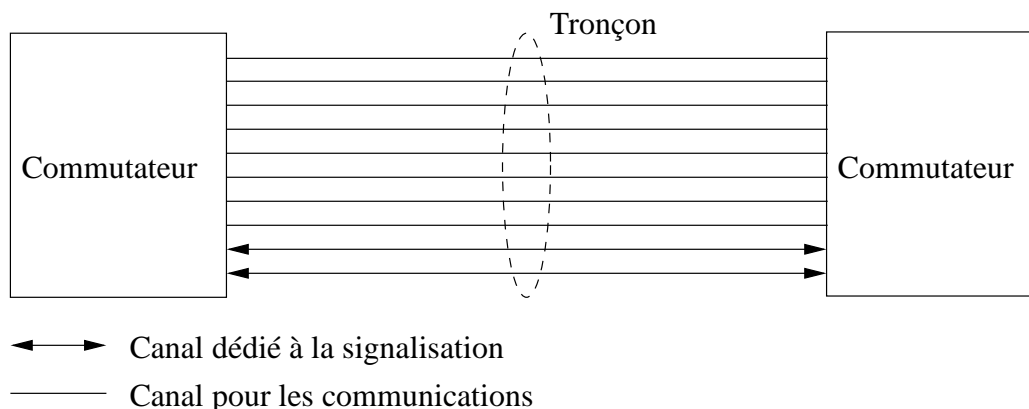


FIG. 8.2 – Faisceau entre deux commutateurs.

La nature aléatoire du trafic s'exprime par le biais de deux processus stochastiques : les tentatives d'appel et le temps de communication. On suppose habituellement qu'une tentative d'appel d'un utilisateur est indépendante de toute tentative d'un autre utilisateur. Dès lors, le nombre de tentatives d'appel pendant tout intervalle de temps est indéterminé. Dans la majorité des cas, le temps de communication est également aléatoire. Aussi, la charge de trafic d'un réseau est fonction de la fréquence des appels et du temps moyen de communication. La figure 8.3 montre le profil d'activité d'un faisceau composé de 5 lignes.

¹Sauf pour les appels prioritaires pour lesquels le système libère les circuits nécessaires.

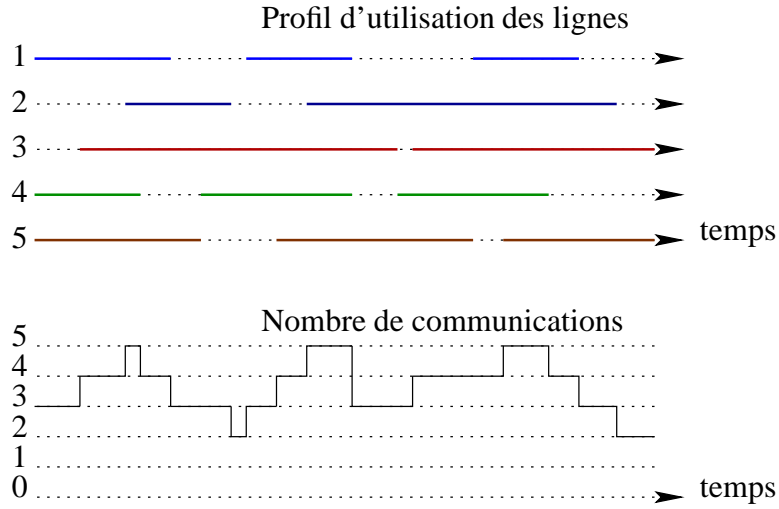


FIG. 8.3 – Profil d'activité d'un faisceau composé de 5 lignes.

Pour mesurer la capacité du faisceau, on pourrait prendre le volume de *trafic écoulé* pendant la période d'observation ; il s'agirait dans ce cas de l'intégrale du nombre de communications instantanées, tel que représenté à la figure 8.3. En pratique, on préfère utiliser la notion d'intensité de trafic.

Définition 25 [Intensité du trafic écoulé] *L'intensité du trafic écoulé I est le rapport entre le volume du trafic observé et la période d'observation T .*

En fait, l'intensité telle que définie ci-avant est un estimateur du trafic écoulé ; en toute rigueur, il faudrait augmenter indéfiniment la période T pour éliminer tout "effet de bord". Soit T , la période d'observation². La fonction indicatrice $1_i(t)$ du circuit i vaut 1 si le circuit est utilisé au temps t ; elle vaut 0 sinon. Pour un faisceau de N circuits, l'intensité vaut alors

$$I = \frac{\int_0^T \sum_{i=1}^N 1_i(t) dt}{T} = \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^T 1_i(t) dt}{T} \quad (8.1)$$

L'intensité de trafic représente donc l'occupation moyenne du lien durant une certaine période. Bien que l'intensité soit adimensionnelle, comme l'expression d'un rapport entre deux temps, on parle d'ERLANG, noté $[E]$, du nom du théoricien Danois, père de la théorie. Remarquons que la capacité maximale d'un circuit est de 1 ERLANG. Dans un système à perte, la capacité n'excède jamais le nombre de circuits.

En pratique, on utilise deux paramètres importants pour caractériser le trafic :

1. le taux moyen d'appels entrants λ_e , mesuré en [appels/s],
2. la durée moyenne d'un appel t_m , en [s/appel]. Si $\#_T$ représente le nombre d'appels effectués pendant l'intervalle de temps T , alors la durée moyenne vaut

$$t_m = \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^T 1_i(t) dt}{\#_T} \quad (8.2)$$

Charge. Ces deux paramètres permettent de définir la charge.

Définition 26 [Charge de trafic écoulé] *On définit la charge écoulée d'un faisceau, exprimée en ERLANG, comme le produit du taux d'appels entrants par la durée moyenne d'appel. On la note A_e .*

$$A_e = \lambda_e t_m \quad (8.3)$$

²Il s'agit typiquement d'une période de 15 minutes.

Il est important de remarquer que l'on exclut, dans la charge, la charge due à la signalisation. D'autre part, la charge, qui est une combinaison de deux paramètres moyens, ne fournit aucune information quant à une corrélation éventuelle entre le taux d'appel et la durée.

Exemple : l'analyse des appels d'une société révèle un taux d'appel de 40 appels par heure et une durée moyenne par appel de 5 minutes. La charge vaut donc

$$\frac{40}{60} \times 5 = \frac{200}{60} = 3,3 [E] \quad (8.4)$$

ce qui signifie qu'il y a en moyenne 3,3 lignes occupées si la distribution est uniforme.

Charge de référence. La charge maximale disponible sur un faisceau à N liens vaut théoriquement N . Elle correspond à une occupation permanente des canaux. En pratique, comme les appels ont lieu de manière aléatoire, il arrive que le faisceau soit congestionné, c'est-à-dire que les N liens soient occupés. La charge pratique est donc inférieure à N .

Lors de l'étude du trafic, il faut distinguer deux types de charge :

1. la *charge offerte*, c'est la charge qui serait transportée par le réseau s'il pouvait honorer toutes les demandes de connexion.
2. la *charge écoulee* ; la charge réellement mesurée dans le réseau.

La charge offerte est utilisée dans la définition de la charge A .

Définition 27 La charge offerte A vaut

$$A = \lambda t_m \quad (8.5)$$

où λ est le taux moyen de tentatives d'appels.

Par construction, la charge écoulee est inférieure à N . La charge offerte est théoriquement sans limite. La *probabilité de rejet*, notée B , s'écrit comme le quotient du nombre d'appels rejetés au nombre de tentatives n (n_e est le nombre d'appels acceptés) dans tout intervalle de temps, par exemple la durée moyenne de communications. Ainsi,

$$B = \frac{n - n_e}{n} = \frac{A - A_e}{A} \quad (8.6)$$

Le nombre de canaux nécessaire pour assurer une borne maximale à la probabilité de rejet d'un appel en raison d'une congestion momentanée est principalement une fonction de la charge maximale souhaitée par l'opérateur du réseau. Comme cette charge fluctue au cours du temps, il est d'usage de choisir une *charge de référence* pour une *heure de pointe*, représentant la charge à allouer par utilisateur. Par exemple, on considère que la probabilité qu'un utilisateur occupe une ligne en heure de pointe est de l'ordre de 0,02 à 0,1. Cela revient à admettre que le réseau doit réserver une capacité A_0 de 0,02 à 0,1 $[E]$ par utilisateur. Dès lors, le nombre total d'utilisateurs ayant accès au réseau en heure de pointe, pour une probabilité de blocage fixée, vaut

$$M = \frac{A}{A_0} \quad (8.7)$$

Une dernière remarque s'impose. Lors du dimensionnement d'un réseau d'entreprise, il importe de tenir compte de plusieurs types de trafic. À défaut de renseignement statistique sur le trafic téléphonique d'une entreprise, on formule l'hypothèse suivante (valeurs statistiques admises par la profession, d'après [30, page 27]) : le trafic d'un poste, à l'heure de pointe, est en moyenne considéré comme étant égal à 0,12 $[E]$ se répartissant comme suit :

- 0,04 $[E]$ en trafic sortant,
- 0,04 $[E]$ en trafic entrant,
- 0,04 $[E]$ en trafic interne à l'entreprise.

8.2 Analyse statistique des appels

Un réseau peut être dimensionné de plusieurs façons. Dans un certain cas, il faut pouvoir accepter un accès simultané pour tous les utilisateurs. Ce système, pour performant qu'il soit, est extrêmement coûteux. Une approche plus réaliste consiste à dimensionner un réseau sur base d'une capacité commercialement souhaitable en période de pointe. Comme préalable se pose alors la question de déterminer les paramètres de dimensionnement.

Pour rappel, pour calculer la capacité d'un réseau téléphonique, il faut tenir compte de deux paramètres :

1. le *nombre de tentatives d'appels* durant une période déterminée et
2. la *durée* des appels.

8.2.1 Processus de dénombrement

Pour la modélisation de la distribution des appels, nous allons partir d'un *processus aléatoire de dénombrement* ou de *comptage* $D(t)$ qui détermine pour tout temps t le nombre d'appels initiés après $t = 0$. Autrement dit, $D(t)$ compte le nombre d'appels effectués pendant l'intervalle $]0, t]$. Il s'agit bien évidemment d'un processus à valeurs entières dont les réalisations se représentent sous la forme d'une fonction en escaliers. À la figure 8.4, on constate qu'au temps $t = 8\Delta T$, cinq appels ont été initiés.

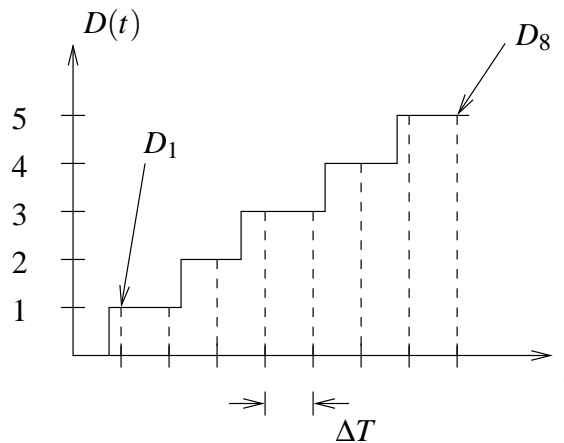


FIG. 8.4 – Réalisations d'un processus de comptage.

Plutôt que cette courbe, c'est le nombre d'occurrences pendant tout intervalle $[t_1, t_2]$ qui nous intéresse ; après tout, on devra bien se choisir une durée typique pour l'analyse. Imaginons que l'on puisse découper l'axe temporel en intervalles de largeur ΔT tellement étroits qu'ils contiennent *tout au plus une occurrence*. Chacun de ces intervalles, référencés par $]n\Delta T, (n+1)\Delta T]$, est le lieu d'une variable aléatoire binaire D_n . Dès lors, $D_n = 1$ implique qu'une tentative d'appel a été menée pendant l'intervalle de temps $]n\Delta T, (n+1)\Delta T]$, $D_n = 0$ mentionne qu'aucune tentative d'appel n'a été menée pendant cet intervalle. À supposer que ces variables aléatoires soient indépendantes, la résultante n'est autre qu'une loi binomiale.

Par généralisation, pour toute constante positive $\lambda > 0$, il est possible de choisir une valeur pour ΔT telle que $\lambda \Delta T < 1$ (pour pouvoir définir une probabilité). Si $\lambda \Delta T$ représente la probabilité de réussite³ de chacune des variables D_1, D_2, \dots , considérant un intervalle de temps $T = m\Delta T$, on obtient les probabilités suivantes :

³Et donc $(1 - \lambda \Delta T)$ représente l'absence de tentative.

1. probabilité d'avoir n tentatives d'appels pendant la durée T et donc sur les m intervalles de temps ΔT (n réussites pour la loi binomiale) :

$$(\lambda \Delta T)^n = \left(\frac{\lambda T}{m} \right)^n \quad (8.8)$$

2. probabilité d'avoir $m - n$ intervalles de temps ΔT sans tentative d'appel ($m - n$ échecs)

$$(1 - \lambda \Delta T)^{m-n} = \left(1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} \quad (8.9)$$

Le nombre d'occurrences D_m obtenues pendant un intervalle de temps $T = m\Delta T$ obéit dès lors à la fonction de densité de probabilité suivante (loi binomiale)

$$f_{D_m}(n) = p(D_m = n) = \begin{cases} C_m^n \left(\frac{\lambda T}{m} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} & n = 0, 1, \dots, m \\ 0 & n \neq 0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (8.10)$$

où $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$. La variable aléatoire D_m , représentant le nombre de tentatives d'appel pendant l'intervalle de temps T , est une variable aléatoire binomiale de moyenne $m \left(\frac{\lambda T}{m} \right) = \lambda T$. Le paramètre λ représente donc *le nombre moyen de tentatives d'appels par unité de temps* tandis que λT représente *le nombre moyen de tentatives d'appels sur l'intervalle de temps T* .

8.2.2 Variable aléatoire de POISSON : définition et propriétés

Le développement précédent présuppose une durée particulière ΔT . Il est intéressant d'examiner le comportement lorsque $m \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire lorsque $\Delta T \rightarrow 0$.

La densité de probabilité du dénombrement (relation 8.10) peut s'écrire sous la forme suivante, pour $n = 0, 1, \dots, m$,

$$f_{D_m}(n) = C_m^n \left(\frac{\lambda T}{m} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} \quad (8.11)$$

$$= \frac{m!}{n!(m-n)!} \left(\frac{\lambda T}{m} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} \quad (8.12)$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \frac{(\lambda T)^n}{m^n} \left(1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} \quad (8.13)$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{m^n} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \left(1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} \quad (8.14)$$

Le premier facteur de ce produit contient n termes au numérateur et également n termes au dénominateur. De plus, à mesure que $m \rightarrow +\infty$, chaque rapport de type $\frac{(m-\dots)}{m}$ tend vers 1. Dès lors,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{m^n} = 1 \quad (8.15)$$

Le second facteur ne dépend pas de m . Quant au troisième terme, il vaut

$$\left(1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} = \frac{\left(1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^m}{\left(1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^n} \quad (8.16)$$

et donc

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{\lambda T}{m}\right)^m}{\left(1 - \frac{\lambda T}{m}\right)^n} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda T}{m}\right)^m = e^{-\lambda T} \quad (8.17)$$

Dès lors,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f_{D_m}(n) = \begin{cases} \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} & n = 0, 1, \dots, m \\ 0 & n \neq 0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (8.18)$$

qui n'est autre que la *variable aléatoire de POISSON* de paramètre $\alpha = \lambda T$. Étant donné que l'on a fait tendre m vers l'infini, l'indice de la variable aléatoire D_m n'a plus de raison d'être ; nous écrivons donc D .

Définition 28 [Variable aléatoire de POISSON] On appelle variable aléatoire de POISSON une variable aléatoire D discrète dont la densité de probabilité est

$$f_D(n) = \begin{cases} \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} & n = 0, 1, \dots \\ 0 & n \neq 0, 1, \dots \end{cases} \quad (8.19)$$

Elle représente donc ici la probabilité d'avoir n tentatives d'appels pendant la durée T .

La loi de POISSON fait intervenir un taux moyen d'occurrences λ et un intervalle de temps d'observation T ; ces dénominations sont justifiées par le théorème suivant (on définit $\alpha = \lambda T$) :

Théorème 29 [35, page 63] Soit à effectuer n tirages. Pour chaque tirage, la probabilité de l'événement pertinent est définie égale à $\frac{\alpha}{n}$, où $\alpha > 0$ est une constante et $n > \alpha$. Soit une variable aléatoire S_n qui dénombre les occurrences d'événements pertinents pour n tirages effectués. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, la densité de probabilité de S_n converge vers une loi de POISSON de paramètre α .

Démonstration.

Elle découle des développements précédents. ■

Théorème 30 L'espérance et la variance d'une variable aléatoire de POISSON valent toutes deux α

$$\mu_D = \alpha \quad (8.20)$$

$$\sigma_D^2 = \alpha \quad (8.21)$$

Démonstration.

Démontrons la relation 8.20.

$$\mu_D = \sum_{i=0}^{+\infty} i f_D(i) = \sum_{i=0}^{+\infty} i \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha} \quad (8.22)$$

Le terme $i = 0$ de la sommation vaut 0. Après le changement de variable $i = j + 1$,

$$\mu_D = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) \frac{\alpha^{j+1}}{(j+1)!} e^{-\alpha} = \alpha \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}}_1 = \alpha \quad (8.23)$$

Le fait que la somme soit égale à 1 découle du fait que la fonction de répartition de la loi de POISSON vaut 1 à l'infini (la somme des probabilités définies par la variable aléatoire de POISSON vaut 1). La relation 8.21 se démontre d'une manière identique. ■

Ainsi donc, $\alpha = \lambda T$ est égal à la valeur moyenne de la loi de POISSON, d'où le fait que $\lambda = \frac{\alpha}{T}$ est la valeur moyenne du nombre d'occurrences *par unité de temps* ; on parle parfois d'*intensité* pour λ .

Question 31 Soit un taux moyen d'appels de 4 par minute. Quelle est la probabilité $P_{\geq 5}$ d'avoir 5 appels ou plus pendant une minute ?

Réponse

Par la variable de POISSON,

$$P_{\geq 5} = \sum_{i=5}^{+\infty} f_D(i) = 1 - \sum_{i=0}^4 f_D(i) \quad (8.24)$$

Comme $\alpha = \lambda T = 4 \times 1 = 4$,

$$P_{\geq 5} = 1 - \left(1 + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} \right) e^{-4} = 0,37 \quad (8.25)$$

■

8.2.3 Processus de POISSON

Prenons un intervalle de temps $]t_0, t_1]$. Le nombre d'occurrences pendant cet intervalle de temps est fourni par la loi de POISSON avec $T = t_1 - t_0$. Ce résultat s'appuie sur le fait que les tirages que représente la loi binomiale sont indépendants entre eux. Dès lors, les occurrences relevées sur des intervalles de temps sans recouvrement sont indépendants. À la limite, lorsque $T \rightarrow 0$, le dénombrement résulte d'une succession d'observations indépendantes, toutes décrites par une loi de POISSON. Il s'agit dans ce cas d'un processus de POISSON.

Définition 32 [Processus de POISSON] Un processus de dénombrement $D(t)$ est un processus de POISSON d'intensité λ s'il respecte la double condition suivante

- (1) le nombre d'occurrences durant tout intervalle de temps $]t_0, t_1]$, $D(t_1) - D(t_0)$, est une variable aléatoire de POISSON d'espérance $\lambda(t_1 - t_0)$, et
- (2) pour toute paire d'intervalle $]t_0, t_1]$, $]t_2, t_3]$, le nombre d'occurrences durant ces intervalles, $D(t_1) - D(t_0)$ et $D(t_3) - D(t_2)$, sont des variables aléatoires indépendantes.

8.2.4 Temps entre occurrences

Le processus de POISSON est sans mémoire puisqu'il garantit l'indépendance entre intervalles successifs. Cette propriété permet de calculer le temps entre occurrences. En effet, si on appelle X_n la variable aléatoire de temps entre les occurrences n et $n - 1$, si de plus X_1 est définie à partir d'un temps supposé être le lieu d'une occurrence, on établit le théorème suivant (voir figure 8.5 pour l'illustration des variables X_n).

Théorème 33 Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots représentant les temps entre occurrences d'un processus aléatoire de POISSON d'intensité λ sont indépendantes et elles ont pour densité de probabilité

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (8.26)$$

Démonstration.

Soient x_i les réalisations des variables aléatoires X_i . L'occurrence $n - 1$ se produit à l'instant

$$t_{n-1} = x_1 + \dots + x_{n-1} \quad (8.27)$$

Pour toute valeur $x > 0$, $X_n > x$ si et seulement s'il n'y a aucune occurrence durant l'intervalle de temps $]t_{n-1}, t_{n-1} + x]$. Par définition du processus de POISSON, la valeur des variables X_1, \dots, X_{n-1}

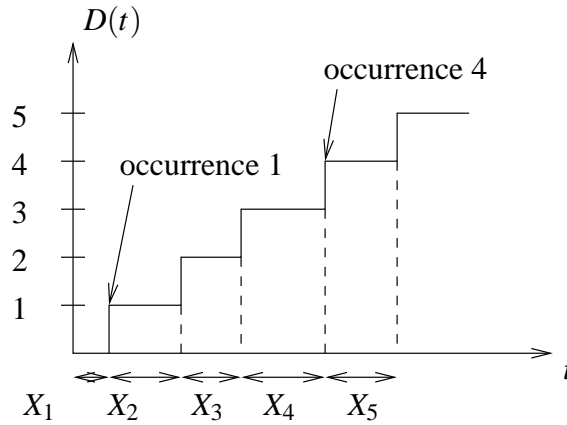


FIG. 8.5 – Processus de POISSON : définition des variables aléatoires X_n .

n'intervient pas dans la détermination de la probabilité au-delà de t_{n-1} (hypothèse d'un processus de POISSON sans mémoire). Dès lors

$$p(X_n > x | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = p(D(t_{n-1} + x) - D(t_{n-1}) = 0) \quad (8.28)$$

Or, cette probabilité représente la probabilité de réalisation d'une variable aléatoire de POISSON dont le paramètre n est nul, donc la probabilité de ne pas avoir de tentative d'appel pendant l'intervalle de temps $]t_{n-1}, t_{n-1} + x]$. Dès lors,

$$p(D(t_{n-1} + x) - D(t_{n-1}) = 0) = e^{-\lambda x} \quad (8.29)$$

X_n est donc bien indépendante des autres X_i et sa fonction de répartition vaut

$$F_{X_n}(x) = p(X_n \leq x) = 1 - p(X_n > x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8.30)$$

dont la dérivée correspond à la densité de probabilité fournie par la relation 8.26. ■

La variable aléatoire X_n est une variable aléatoire *exponentielle* dont l'espérance $E\{X\} = \frac{1}{\lambda}$. En fait, le nombre d'occurrences moyen par unité de temps du processus de dénombrement est inversement proportionnel à la durée moyenne séparant deux occurrences. Aussi, le temps moyen à attendre est donc inversement proportionnel au nombre moyen d'occurrences.

Cette formule permet de constater que la probabilité de ne pas avoir d'appel pendant une période T diminue exponentiellement au cours du temps, résultat repris comme ci-après.

Corollaire 34 La probabilité P_0 de ne pas avoir d'occurrences pendant l'intervalle de temps t vaut

$$P_0(\lambda t) = e^{-\lambda t} \quad (8.31)$$

Question 35 Soit un central téléphonique desservant 10.000 utilisateurs. Supposons que chaque utilisateur génère une tentative d'appel par heure. Déterminez la cadence (en nombre de fois par seconde) à laquelle deux appels arrivent à moins de 0,1 [s] entre eux.

Réponse

Le taux moyen d'appels vaut

$$\lambda = \frac{10.000}{3600} = 2,78 [\text{appel}/s]$$

Selon l'équation 8.31, la probabilité de ne pas avoir de tentative pendant 100 [ms] vaut

$$P_0(0,278) = e^{-0,278} = 0,757$$

Ce qui revient à dire que 24,3% des tentatives d'appel sont écartées de moins de 100 [ms]. La cadence s'obtient alors par

$$\lambda (1 - P_0(0,278)) = 0,67 \text{ [fois/s]} \quad (8.32)$$

■

8.2.5 Temps de communication

Examinons à présent le temps de communication, aussi appelé *temps de service*. Le processus de service peut être d'une complexité extrême, mais on se contente le plus souvent de supposer que la durée d'un appel est indépendante de celle des autres et que toutes les durées obéissent à la même loi. Deux hypothèses pratiques sont examinées.

Hypothèse 1 : temps de communication constant

Bien que le temps de communication t_m ne soit pas constant pour une communication téléphonique, le modèle convient pour certains types de transmission de données.

On détermine aisément le nombre de lignes occupées à tout moment. En effet, en supposant l'absence de congestion, la probabilité d'avoir n circuits occupés est déterminée par la probabilité d'avoir n occurrences pendant l'intervalle t_m précédant l'analyse. Comme le nombre de circuits actifs n'est autre que la charge $A_e = \lambda_e t_m$, la probabilité d'avoir n circuits occupés s'obtient par la loi de POISSON. Cette probabilité vaut

$$f_D(n) = \frac{A_e^n}{n!} e^{-A_e} \quad (8.33)$$

Hypothèse 2 : temps de communication à décroissance exponentielle

L'hypothèse d'un temps de communication à décroissance exponentielle est plus vraisemblable pour des communications téléphoniques. La probabilité que la conversation dure plus longtemps de t vaut alors

$$P(> t) = e^{-\frac{t}{t_m}} \quad (8.34)$$

où t_m est le temps de communication moyen.

La loi exponentielle jouit d'une propriété remarquable : quelle que soit la durée de la communication, la probabilité n'est fonction que du temps à venir. Ainsi, si une communication a duré 5 [s], la probabilité de durer 3 nouvelles secondes vaut $P(> 3) = e^{-3/t_m}$. Pour une durée totale de 8 [s], la probabilité vaut $P(> 8) = P(> 5) \times P(> 3) = e^{-5/t_m} \times e^{-3/t_m} = e^{-8/t_m}$.

8.3 Lois d'analyse du trafic

Dans un modèle traditionnel de réseau commuté téléphonique, on considère qu'un faisceau offre N canaux à un nombre d'utilisateurs largement supérieur à N et on suppose que chaque utilisateur effectue des appels de courte durée. Cette vision traditionnelle n'est plus tout à fait adaptée au trafic actuel du réseau téléphonique ; en effet, le réseau téléphonique transporte un pourcentage non négligeable de connections à Internet. Or, la durée moyenne d'une connexion à Internet est largement supérieure à la durée d'un appel téléphonique vocal. Nous adopterons néanmoins l'hypothèse traditionnelle dans nos développements.

8.3.1 Modèle d'un système avec perte (sans mémoire) : statistique d'ERLANG B

La statistique ERLANG B va nous permettre de déterminer la probabilité de tentative d'appels lors d'une congestion du réseau (probabilité que les N lignes du réseau soient occupées) en fonction de la charge et du nombre de lignes caractérisant le tronçon considéré.

Pour analyser la charge d'un réseau, il faut prendre en compte le nombre de tentatives d'appel, le nombre de connexions en cours et le nombre d'arrêts d'appel.

Nombre de tentatives d'appel

Le nombre de tentatives d'appel peut être vu comme un processus de dénombrement. Pendant l'intervalle de temps Δt (intervalle de temps d'observation), le nombre de tentatives d'appel N_A est donc une variable aléatoire de POISSON telle que

$$p(N_A = n) = \frac{(\lambda \Delta t)^n}{n!} e^{-\lambda \Delta t}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.35)$$

où λ représente le nombre moyen de tentatives par unité de temps.

Nombre d'arrêts d'appel (relâchements de ligne)

De même, le nombre d'arrêts N_D pour un nombre d'arrêt moyen η par unité de temps vaut

$$p(N_D = n) = \frac{(\eta \Delta t)^n}{n!} e^{-\eta \Delta t}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.36)$$

Charge

À tout moment, des tentatives d'appel et des arrêts peuvent avoir lieu sur la ligne ; la charge fluctue donc entre 0 et N appels en cours. Pour un intervalle de temps très court dt , la probabilité d'avoir exactement une tentative d'appel ($n = 1$) vaut $\lambda dt e^{-\lambda dt} \simeq \lambda dt$ alors que la probabilité d'avoir un appel qui se termine vaut $\eta dt e^{-\eta dt} \simeq \eta dt$.

Dès lors, à supposer que k lignes sur un total de N lignes soient occupées à l'instant t , on calcule respectivement trois probabilités sur un intervalle de temps dt

- P_1 la probabilité d'une tentative d'appel,
- P_2 la probabilité d'un arrêt et
- P_3 la probabilité d'un statu quo en matière d'occupation de lignes.

Elles valent respectivement

$$P_1 = \lambda dt \quad (8.37)$$

$$P_2 = C_k^1 (\eta dt)^1 (1 - \eta dt)^{k-1} \simeq k \eta dt \quad (8.38)$$

car on tient compte du fait que n'importe quelle ligne parmi les k lignes peut se libérer pendant l'intervalle de temps dt . Finalement, l'événement de statu quo se produit quand il n'y a pas de tentative d'appel et qu'aucune des k lignes occupées n'est sujet à un relâchement. Ainsi, la probabilité P_3 est donnée par

$$P_3 = (1 - \lambda dt)(1 - k \eta dt) \quad (8.39)$$

$$= 1 - \lambda dt - k \eta dt + k \lambda \eta (dt)^2 \quad (8.40)$$

$$\simeq 1 - \lambda dt - k \eta dt \quad (8.41)$$

Définissons alors $p(k; t + dt)$ comme la probabilité qu'il y ait k lignes occupées à l'instant $t + dt$. Il est alors possible de déterminer $p(k; t + dt)$ en utilisant les probabilités P_1 , P_2 et P_3

$$\begin{aligned} p(k; t + dt) &= P_3 p(k; t) + P_1 p(k - 1; t) + P_2 p(k + 1; t) \\ &\simeq (1 - \lambda dt - k\eta dt) p(k; t) + \lambda dt p(k - 1; t) + (k + 1)\eta dt p(k + 1; t) \end{aligned} \quad (8.42)$$

Le premier terme correspond au fait qu'il y avait déjà k lignes occupées à l'instant t mais qu'aucune tentative d'appel ni d'arrêt n'ait eu lieu. Le deuxième terme correspond au fait qu'il y avait $k - 1$ lignes occupées à l'instant t mais qu'une tentative d'appel (dès lors réussie) ait eu lieu. Enfin, le dernier terme correspond au fait qu'il y avait $k + 1$ lignes occupées à l'instant t et qu'une ligne se soit libérée pendant l'intervalle de temps dt . Il existe cependant deux cas particuliers correspondant à $k = 0$ et $k = N$

$$p(0; t + dt) = (1 - \lambda dt) p(0; t) + \eta dt p(1; t) \quad (8.43)$$

représentant le cas où aucune ligne n'est occupée (il n'y a donc pas de possibilité de relâchement d'une ligne) et

$$p(N; t + dt) = (1 - \lambda dt - N\eta dt) p(N; t) + \lambda dt p(N - 1; t) \quad (8.44)$$

pour le cas où toutes les lignes sont occupées (une nouvelle tentative d'appel ne peut donc être générée).

En régime, on peut faire l'hypothèse que les probabilités ne sont pas fonction du temps et écrire

$$p(k; t + dt) = p(k; t) = P_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (8.45)$$

L'équation de transition peut alors s'écrire

$$P_k = (1 - \lambda dt - k\eta dt) P_k + \lambda dt P_{k-1} + (k + 1)\eta dt P_{k+1} \quad (8.46)$$

$$\Rightarrow 0 = [(-\lambda - k\eta) P_k + \lambda P_{k-1} + (k + 1)\eta P_{k+1}] dt \quad (8.47)$$

$$\Rightarrow (\lambda + k\eta) P_k = \lambda P_{k-1} + (k + 1)\eta P_{k+1}, \quad 0 < k < N \quad (8.48)$$

De même, les deux cas particuliers deviennent

$$\lambda P_0 = \eta P_1, \quad k = 0 \quad (8.49)$$

$$(\lambda + N\eta) P_N = \lambda P_{N-1}, \quad k = N \quad (8.50)$$

De plus, les probabilités P_k doivent respecter la condition suivante

$$P_0 + P_1 + \dots + P_N = 1 \quad (8.51)$$

On peut montrer [22] que l'expression de P_k vérifiant toutes ces conditions est donnée par

$$P_k = \frac{\frac{(\lambda/\eta)^k}{k!}}{\sum_{i=0}^N \frac{(\lambda/\eta)^i}{i!}} \quad (8.52)$$

Cette formule représente ainsi la probabilité d'avoir k lignes occupées. Elle est valable $\forall k \in [0, N]$.

Formule d'ERLANG B. L'état qui résulte d'une occupation de toutes les lignes est appelé *congestion*. Si un appel est rejeté en raison d'une occupation des N lignes, la probabilité de cet événement de blocage est celle de P_N ($k = N$)

$$B = P_N = \frac{\frac{(\lambda/\eta)^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{(\lambda/\eta)^i}{i!}} \quad (8.53)$$

Cette expression de la probabilité de blocage est la *formule dite d'ERLANG B*.

Proposition 36 [Espérance de la loi la distribution d'ERLANG B] L'espérance des probabilités P_k fournit le nombre moyen de lignes occupées, c'est-à-dire la charge du trafic écoulé. Cette espérance vaut

$$E\{k\} = A(1 - B) \quad (8.54)$$

Démonstration. En effet,

$$E\{k\} = \sum_{k=0}^N k \frac{\frac{(\lambda/\eta)^k}{k!}}{\sum_{i=0}^N \frac{(\lambda/\eta)^i}{i!}} = \frac{\lambda}{\eta} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\frac{(\lambda/\eta)^k}{k!}}{\sum_{i=0}^N \frac{(\lambda/\eta)^i}{i!}} = \frac{\lambda}{\eta} (1 - B) = A(1 - B) \quad (8.55)$$

où A est la charge offerte du faisceau et $A(1 - B)$ la charge réelle. Dans la mesure où la probabilité de blocage est petite, l'occupation moyenne des N lignes est égale à $\frac{\lambda}{\eta}$. ■

La probabilité de blocage s'exprime donc par l'expression

$$B = P_N = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}}, \quad A = \frac{\lambda}{\eta} \quad (8.56)$$

Interprétation. La probabilité de blocage augmente avec la charge A et décroît avec N , comme le montre graphiquement la figure 8.6. Pour une probabilité de blocage fixée, le rapport A/N (charge offerte à chaque utilisateur) est proportionnel au nombre de lignes N . Dès lors, la charge A , pour une probabilité de blocage fixée, augmente plus que proportionnellement en fonction du nombre de lignes N . Pour s'en convaincre, il suffit de regarder le tableau 8.1. Doubler la valeur de N de 10 à 20 entraîne la multiplication de A par $12/4,5 = 2,67$. Pour $B = 1\%$, on observe un gain important en efficacité lorsque l'on passe de 10 à 20 lignes tandis que ce gain est nettement moins important lorsque l'on doit, pour une même probabilité de blocage, ajouter des lignes à un faisceau contenant déjà 50 à 60 lignes.

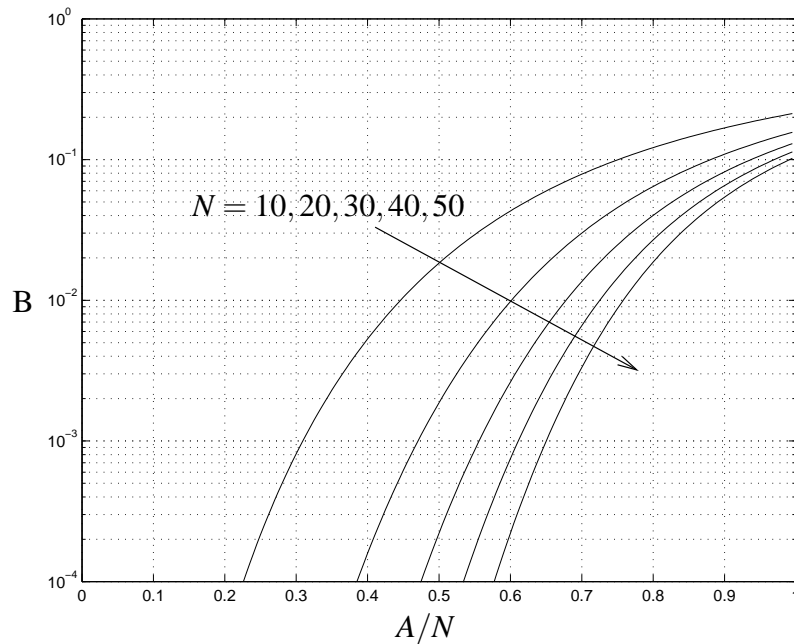


FIG. 8.6 – Loi de probabilité ERLANG B (d'après [22, page 271]).

N	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
A	4,5	12,0	20,3	29,0	37,9	46,9	56,1	65,4	74,7	84,1
$\frac{A}{N}$	0,45	0,60	0,68	0,73	0,76	0,78	0,80	0,82	0,83	0,84

TAB. 8.1 – Illustration des proportions pour $B = 0,01$

Dimensionnement. Le dimensionnement d'un faisceau téléphonique est réalisé en recherchant la charge maximale A (en ERLANG) qui peut être fournie lorsque désire maintenir la probabilité de blocage B en-dessous d'un certain seuil, par exemple $B = 0,01$ ou $0,02$, qui est une valeur typique pour le dimensionnement d'un faisceau dans un réseau. La formule d'ERLANG B est souvent utilisée dans ce but parce qu'elle est tabulée et facilement interprétable, bien qu'elle fournisse une valeur plus faible pour B que certaines formules établies à partir d'hypothèses autres quant au trafic. En effet, la formule d'ERLANG B ne tient pas compte du fait qu'une tentative d'appel ayant échoué peut être reconduite jusqu'à acceptation par le réseau.

Insistons sur le fait que la charge maximale ne représente pas la charge moyenne offerte à chaque utilisateur, mais une charge globale maximale.

Table. Une table de la loi d'ERLANG B est donnée à la page 133. Soit, par exemple, $N = 20$ et $B = 0,01$. À partir de la table, nous obtenons $A = 12,0 [E]$. Si une charge $A_0 = 0,03 [E]$ doit être offerte à chaque utilisateur en moyenne, le nombre d'utilisateurs doit être limité à $M = A/A_0 = 400$.

Tentatives et essais reconduits. L'effet d'une tentative d'appel ayant échoué mais reconduite jusqu'à obtention d'une ligne peut être modélisé assez facilement. Appelons A' la charge réelle qui tient compte de la reconduite des tentatives échouées. On a

$$A' = A + AB + (AB)B + (AB^2)B + \dots = \frac{A}{1-B} \quad (8.57)$$

La table de la figure 8.2 peut être utilisée pour trouver A' . Il est important de noter qu'en principe le réseau doit être dimensionné pour cette charge A' et non pour la charge A . Alors A peut être obtenue par $A = (1 - B)A'$. Par exemple, pour $B = 0,02$ et $N = 30$, la table donne $A = 21,9$ qui doit être vu comme la valeur de A' . La valeur de A est alors égale à $(1 - 0,02) \times 21,9 = 21,5$. Si on désire offrir à chaque utilisateur une charge moyenne $A_0 = 0,03$, on doit limiter le nombre d'utilisateurs à $M = A/A_0 = 715$, contre 730 lorsque qu'aucune tentative ayant échoué n'est reconduite.

8.3.2 Autres modèles

Pour terminer, le tableau 8.3 et la figure 8.7 dressent une comparaison des probabilités de blocage obtenues pour différents modèles.

On voit que, de manière générale, la loi d'ERLANG B sous-estime la probabilité de blocage par rapport à d'autres modèles. De plus, si la probabilité d'erreur est de l'ordre de 10^{-2} , on constate sur le graphique 8.7 qu'il y a peu de fluctuations entre les différentes formules. En pratique, on se contente bien souvent de la loi d'ERLANG B.

	<i>B</i>					<i>B</i>			
<i>N</i>	0,01	0,005	0,003	0,001	<i>N</i>	0,01	0,005	0,003	0,001
1	0,01	0,005	0,003	0,001	31	21,2	19,9	19,0	17,4
2	0,153	0,105	0,081	0,046	32	22,0	20,7	19,8	18,2
3	0,46	0,35	0,29	0,19	33	22,9	21,5	20,6	19,0
4	0,87	0,7	0,6	0,44	34	23,8	22,3	21,4	19,7
5	1,4	1,1	1,0	0,8	35	24,6	23,2	22,2	20,5
6	1,9	1,6	1,4	1,1	36	25,5	24,0	23,1	21,3
7	2,5	2,2	1,9	1,6	37	26,4	24,8	23,9	22,1
8	3,1	2,7	2,5	2,1	38	27,3	25,7	24,7	22,9
9	3,8	3,3	3,1	2,6	39	28,1	26,5	25,5	23,7
10	4,5	4,0	3,6	3,1	40	29,0	27,4	26,3	24,4
11	5,2	4,6	4,3	3,7	41	29,9	28,2	27,2	25,2
12	5,9	5,3	4,9	4,2	42	30,8	29,1	28,0	26,0
13	6,6	6,0	5,6	4,8	43	31,7	29,9	28,8	26,8
14	7,4	6,7	6,2	5,4	44	32,5	30,8	29,7	27,6
15	8,1	7,4	6,9	6,1	45	33,4	31,7	30,5	28,4
16	8,9	8,1	7,6	6,7	46	34,3	32,5	31,4	29,3
17	9,7	8,8	8,3	7,4	47	35,2	33,4	32,2	30,1
18	10,4	9,6	9,0	8,0	48	36,1	34,2	33,1	30,9
19	11,2	10,3	9,8	8,7	49	37,0	35,1	33,9	31,7
20	12,0	11,1	10,5	9,4	50	37,9	36,0	34,8	32,5
21	12,8	11,9	11,2	10,1	51	38,8	36,9	35,6	33,3
22	13,7	12,6	12,0	10,8	52	39,7	37,7	36,5	34,2
23	14,5	13,4	12,7	11,5	53	40,6	38,6	37,3	35,0
24	15,3	14,2	13,5	12,2	54	41,5	39,5	38,2	35,8
25	16,1	15,0	14,3	13,0	55	42,4	40,4	39,0	36,6
26	17,0	15,8	15,1	13,7	56	43,3	41,2	39,9	37,5
27	17,8	16,6	15,8	14,4	57	44,2	42,1	40,8	38,3
28	18,6	17,4	16,6	15,2	58	45,1	43,0	41,6	39,1
29	19,5	18,2	17,4	15,9	59	46,0	43,9	42,5	40,0
30	20,3	19,0	18,2	16,7	60	47,0	44,8	43,4	40,8

TAB. 8.2 – Tables de la loi d'ERLANG B.

Type d'analyse	Traitement des appels perdus	Formule de blocage
Formules pour un grand nombre (infini) de sources de trafic		
ERLANG B	pas de reconduite	$B_1 = \frac{P_N}{\sum_{k=0}^N P_k}$ avec $P_k = \frac{A^k}{k!}$
Reconduite des appels échoués	appels échoués reconduits tant qu'ils échouent	si B est la probabilité d'erreur $A' = A/(1 - B)$
ERLANG C	appels échoués placés dans une file d'attente infinie	$B = \frac{B_1}{\left[1 - \frac{A(1-B_1)}{N}\right]}$
MOLINA	idem que ERLANG C	$B = 1 - e^{-A} \sum_{k=0}^{N-1} P_k = e^{-A} \sum_{k=N}^{\infty} P_k$
Formules pour un nombre fini de sources, M		
ENGEST	pas de reconduite	$B_2(\rho) = \frac{P_N}{\sum_{k=0}^N P_k}$, $p_k = \binom{M}{k} \rho^k$ et $A(\rho) \simeq \frac{M\rho}{[1 + \rho B_2(\rho)]}$
BERNOULLI	appels perdus retenus	$B = \sum_{k=N}^M \binom{M}{k} \left(\frac{A}{M}\right)^k \left(1 - \frac{A}{M}\right)^{M-k}$

TAB. 8.3 – Résumé de différentes formules de blocage (d'après [22]).

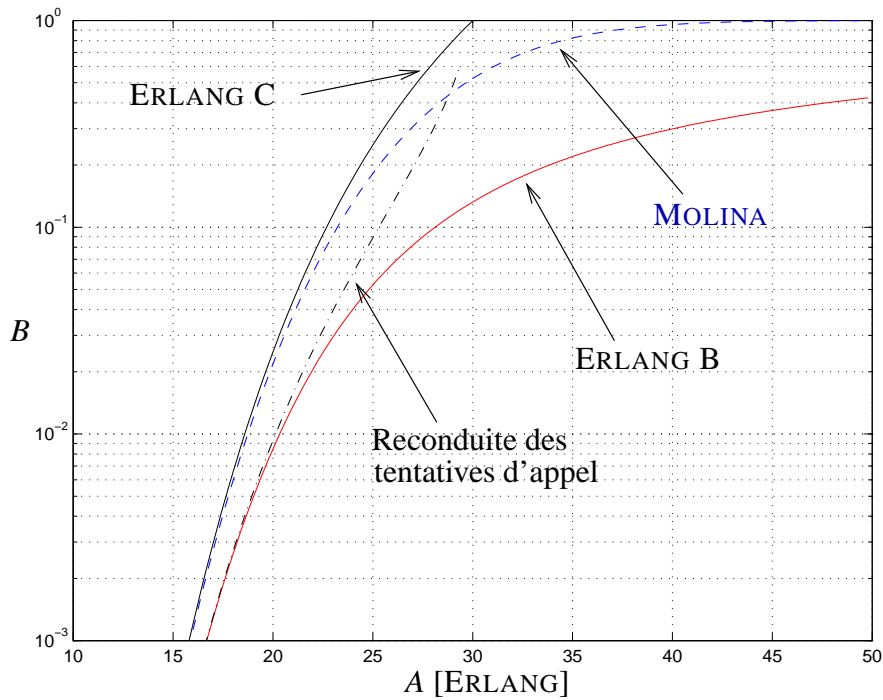


FIG. 8.7 – Comparaison des probabilités de blocage (d'après [22, page 332]).

Troisième partie

Éléments de la couche physique

Chapitre 9

Transmission sur ligne à paires symétriques et réseau téléphonique

9.1 Introduction

La transmission peut se réaliser sur différents supports (câble coaxial, paire torsadée, fibre optique, ...) ou dans l'air. Si les lois de MAXWELL régissent l'ensemble des phénomènes de propagation électromagnétiques, les propriétés des matériaux influencent considérablement les performances, rendant les supports non interchangeables à bien des égards.

La figure 9.1 fournit les ordres de grandeur des performances distance/débit que l'on peut obtenir pour différents supports de transmission physiques. Très clairement, c'est l'utilisation de la fibre monomode qui représente le meilleur choix actuel.

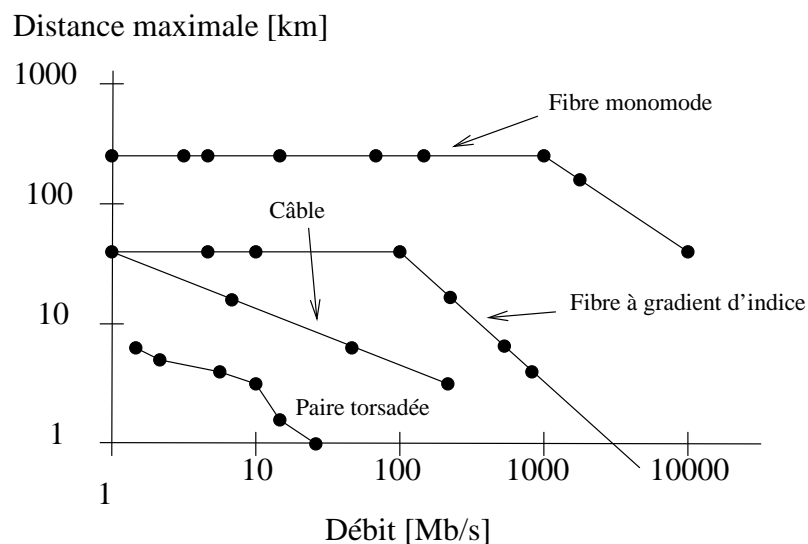


FIG. 9.1 – Comparaison de divers supports de transmission (d'après [34]).

9.1.1 Limitations

Plusieurs phénomènes affectent la transmission d'un signal numérique par une onde électromagnétique. Citons en quelques-uns :

Atténuation L'atténuation est un phénomène équivalent à une perte d'énergie du signal se propageant. On l'exprime généralement en $[dB]$ par kilomètre.

Distorsion Un canal qui fournit en sortie la version du signal original ainsi que des versions atténuées décalées dans le temps, introduit un effet de distorsion d'amplitude (l'amplitude de la transmission du canal n'est pas constante en fonction de la fréquence) et de phase (la phase n'est pas linéaire en fonction de la fréquence).

Dispersion La dispersion est le phénomène à l'origine d'un étalement de l'onde, ce qui dans le cas de communications numériques, se répercute par une confusion entre symboles successifs (le canal possède une bande passante finie).

Bruit Il est totalement impossible d'éviter un bruit dans un système de communications. En fait, les équipements génèrent eux-mêmes un bruit. À cela vient se rajouter le bruit du canal. Aujourd'hui, on préfère utiliser des techniques de transmission numériques pour lutter contre les effets d'un bruit additif de canal. On peut ainsi espérer un taux d'erreur de l'ordre de 10^{-12} pour une transmission sur fibre optique et 10^{-7} sur une ligne à paire de cuivre.

9.1.2 Probabilité d'erreur par paquet

En pratique, le taux d'erreur par bit P_e n'est pas le seul paramètre significatif pour une transmission numérique. En effet, les bits d'information sont rarement isolés ; ils sont plutôt regroupés par paquets. Or, une erreur sur 1 bit du paquet revient à considérer le paquet comme fautif dans sa totalité, ce qui implique quelquefois une retransmission du paquet.

Soit N la taille des paquets à transmettre. La probabilité d'erreur par paquet vaut le complémentaire de la probabilité qu'aucun des N bits ne soit erroné. Dès lors,

$$P_P = 1 - (1 - P_e)^N \quad (9.1)$$

En négligeant les termes du second ordre, on obtient

$$P_P \simeq N \times P_e \text{ si } N \times P_e \ll 1 \quad (9.2)$$

Exemple. Une taille de paquet de $N = 10^5$ bits et un taux d'erreur par bit $P_e = 10^{-7}$ conduisent à $P_P \simeq 10^{-2}$.

9.2 Transmission par ligne

En raison de leur coût modeste, on utilise depuis longtemps les supports de cuivre pour transmettre des signaux : des lignes à paires symétriques en téléphonie ou dans certains réseaux locaux, un câble coaxial pour la distribution de signaux de télévision ou des lignes micro-rubans en hyperfréquence. C'est dire l'importance que revêt ce type de support en pratique. Nous abordons son étude par l'analyse des propriétés.

9.2.1 Définitions

Définition 37 On appelle ligne tout support physique de transmission constitué d'un milieu matériel fini.

Les deux formes de lignes les plus courantes sont la *paire torsadée* constituée de deux conducteurs arrangés en hélice et la *paire coaxiale* formée de deux conducteurs concentriques séparés par un isolant.

Définition 38 On appelle câble de transmission, tout support physique constitué d'un ensemble de lignes.

9.2.2 Propriétés électriques du cuivre

En régime statique, les lignes constituées de cuivre possèdent des propriétés électriques qui, au niveau macroscopique, s'expriment principalement par une résistance, un effet capacitif et un effet inductif.

Résistance

Un fil de cuivre de section S présente une résistance au courant de valeur

$$R = \frac{\rho l}{S} \quad (9.3)$$

où ρ et l désignent respectivement la *résistivité* du conducteur et la longueur du fil (cf. figure 9.2). Ce paramètre, différent pour tout fil, a une influence directe sur l'atténuation de l'onde transportée et donc affecte majoritairement l'amplitude de l'onde transportée.

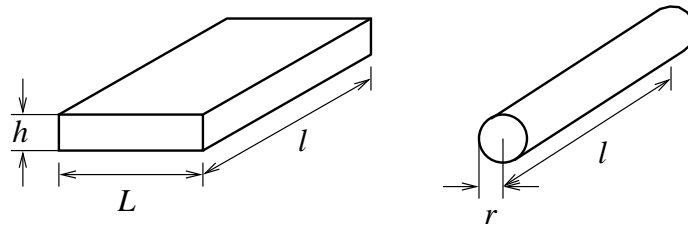


FIG. 9.2 – Résistance d'un conducteur.

Mais ce n'est pas le seul paramètre important car il faut également tenir compte des effets capacitifs et inductifs d'une paire de fils.

Capacitance

On peut montrer que, pour les structures de la figure 9.3, les capacitances par unité de longueur valent respectivement

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(r_2/r_1)} \quad (9.4)$$

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln(s/r)} \quad (9.5)$$

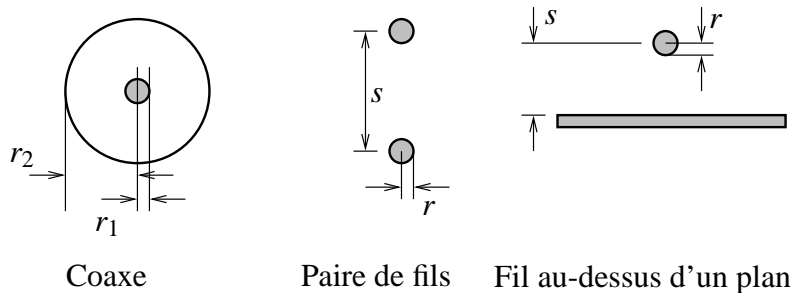


FIG. 9.3 – Section de différentes lignes.

Inductance

Quant à la valeur de l'inductance, elle s'obtient en tirant profit de la propriété générale suivante

$$LC = \varepsilon \quad (9.6)$$

Dans ce qui suit, la ligne est considérée comme idéale, c'est-à-dire comme ayant les mêmes propriétés électriques sur toute sa longueur.

9.2.3 Propagation

La propagation d'une onde électromagnétique le long d'une ligne de transmission prend la forme d'une onde électromagnétique transverse (TEM, *Transverse Electromagnetic Mode*). L'onde se propage principalement dans le diélectrique qui sépare les deux conducteurs d'une ligne de transmission. La figure 9.4 montre les formes des champs dans une série de structures électriques à deux conducteurs.

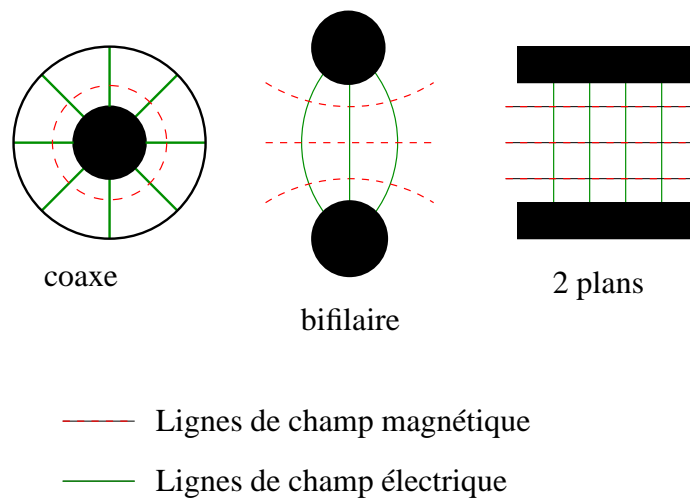


FIG. 9.4 – Configuration du champ électromagnétique en mode TEM pour quelques types de lignes.

9.2.4 Modèle électrique

Après avoir déterminé les caractéristiques électriques principales d'une paire de conducteurs, on peut modéliser le fonctionnement électrique d'une ligne en imaginant le système comme une succession de bouts de lignes infinitésimaux ; la figure 9.5 montre un bout de ligne infinitésimal.

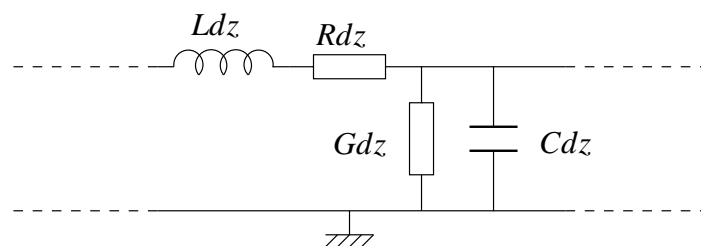


FIG. 9.5 – Segment de ligne infinitésimal.

Paramètres primaires

R , L , C et G sont appelés *paramètres primaires* de la ligne avec

- R = résistance linéique élémentaire, représentant la résistance de la ligne par unité de longueur $[\Omega/m]$. Elle dépend en particulier de la section et de la nature du conducteur,
- L = inductance linéique $[H/m]$, modélisant la présence d'un flux variable autour et entre les structures conductrices,
- C = capacité linéique $[F/m]$, caractérisant la capacité du diélectrique constituant la ligne,
- G = admittance linéique $[\Omega^{-1}/m]$, représentant les pertes diélectriques et les défauts d'isolation de la ligne. Elle dépend de la nature des isolants.

Équations des télégraphistes

En mettant bout à bout des segments de ligne infinitésimaux et sur base du schéma de la figure 9.6, on obtient aisément le système d'équations suivantes, dites *équations des télégraphistes*,

$$\frac{\partial V}{\partial z} = - RI - L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = - GV - C \frac{\partial V}{\partial t} \quad (9.8)$$

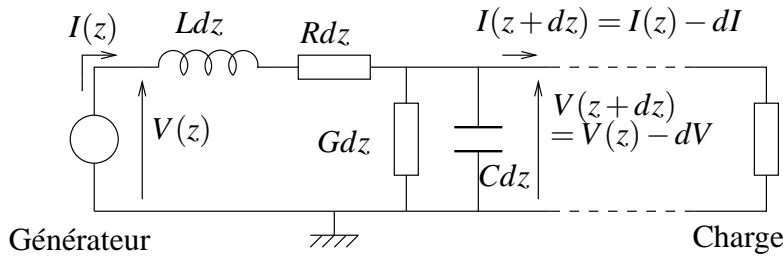


FIG. 9.6 – Modèle d'une ligne de transmission électrique.

La solution du système s'obtient en dérivant l'équation 9.7 par rapport à z et en tenant compte de 9.8. On obtient une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = RGV + (RC + LG) \frac{\partial V}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (9.9)$$

Cas particulier 1 : ligne sans perte

Dans le cas d'une ligne sans perte ($R = G = 0$),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (9.10)$$

ce qui correspond à une équation d'ondes bien connue dont la solution est une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux

$$V(z, t) = (A \cos kz + B \sin kz)(C \cos 2\pi ft + D \sin 2\pi ft) \quad (9.11)$$

où A , B , C et D sont des constantes dont les valeurs dépendent des conditions initiales.

Cas particulier 2 : régime permanent

En régime permanent, $V(z, t) = V(z)e^{j\omega t}$. La solution est de la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = (R + jL\omega)(G + jC\omega)V(z) = \gamma^2 V(z) \quad (9.12)$$

En prenant une constante de propagation $\gamma = \alpha + j\beta$, on obtient

$$V(z) = V_i e^{-\gamma z} + V_r e^{\gamma z} \quad (9.13)$$

L'onde est donc constituée d'une onde incidente ($V_i e^{-\gamma z}$) et d'une onde réfléchie ($V_r e^{\gamma z}$). De plus, on constate que les deux ondes subissent une atténuation $e^{-\alpha z}$ liée au facteur α . On voit tout de suite que l'atténuation croît avec la longueur de la ligne.

La présence d'une atténuation ne signifie pas que toute transmission soit impossible mais bien que le signal est atténué dès qu'il y a des pertes dans le conducteur, impliquant une longueur maximale de la ligne. L'analyse en détail de la question montre que l'atténuation dépend de la fréquence. En fait, elle augmente avec la fréquence. Il est dès lors plus intéressant d'utiliser les basses fréquences pour la transmission. Néanmoins, rien n'empêche d'utiliser les zones d'atténuation plus importantes. C'est le mode de fonctionnement des modems à haut débit ADSL dont le spectre d'utilisation est montré à la figure 9.7.

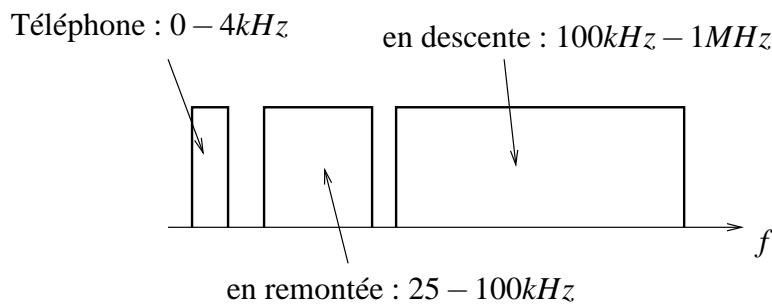


FIG. 9.7 – Spectre d'un signal ADSL.

Paramètres secondaires

Les paramètres primaires ne modélisent la ligne que d'une manière microscopique. On leur préfère souvent les paramètres dits *secondaires* suivants pour déterminer les propriétés macroscopiques du support :

- *impédance caractéristique* Z_c

C'est une donnée complexe qui représente la valeur de l'impédance à connecter en bout de ligne de manière à obtenir une impédance d'entrée de la ligne égale à cette impédance ; on la nomme Z_c . En pratique, on doit absolument tenir compte de la valeur de l'impédance lors du raccordement de lignes ou d'équipements à un réseau. En effet, si deux lignes n'ont pas la même impédance, le droit du raccord est le lieu de réflexions parasites qui diminuent considérablement les performances de la transmission. En effet, le coefficient de réflexion est donné par

$$\frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \quad (9.14)$$

où Z_L est l'impédance de charge. On voit donc que le coefficient de réflexion s'annule lorsque l'impédance de charge d'une ligne (égale à l'impédance d'entrée de la ligne raccordée à cette

ligne) est égal à son impédance caractéristique. Il convient de remarquer que l'adaptation de ligne n'est pas équivalente à l'adaptation conjuguée ; la première conduit à une absence de réflexion, la seconde à un transfert maximum de puissance dans la charge. Ces deux types d'adaptation sont néanmoins compatibles lorsque la charge est purement réelle.

– *coefficient de propagation* γ (cf. supra)

Par définition : $\gamma = \alpha + j\beta$ où

– α = affaiblissement linéique en Néper/mètre $[Np/m]$ ¹

– β = déphasage linéique (en $[rad/m]$)

Le facteur d'atténuation α représente les pertes subies par le signal électrique lors de la propagation le long de la ligne. Il se mesure en injectant un signal à l'une des extrémités de la ligne et en mesurant le signal reçu à l'autre extrémité. β est lié à la longueur d'onde λ et à la vitesse de propagation v de l'onde électromagnétique dans le support par

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} \quad (9.15)$$

Relations entre les paramètres primaires et secondaires

Les paramètres primaires et secondaires sont liés par les relations suivantes

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (9.16)$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (9.17)$$

Ces équations sont générales et valables sur tout type de ligne. Toutefois, certaines simplifications sont possibles en considérant un caractère plutôt inductif ou pas de ligne, une fréquence d'utilisation élevée ou non. D'autre part, on peut raisonnablement admettre que l'admittance linéique est négligeable, autrement dit $G = 0$, en présence d'un isolant entre les conducteurs. Et donc,

$$Z_c \simeq \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} \quad (9.18)$$

$$\gamma \simeq \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C} \quad (9.19)$$

9.2.5 Étude fréquentielle des paramètres

Il est intéressant de mener l'étude fréquentielle des paramètres de ligne en haute fréquence ($\omega L \gg R$). Exploitant l'hypothèse de haute fréquence, on obtient

$$\gamma \simeq \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C} \quad (9.20)$$

$$\simeq \sqrt{j\omega C} \sqrt{j\omega L} \sqrt{1 + \frac{R}{j\omega L}} \quad (9.21)$$

$$\simeq \sqrt{j\omega C} \sqrt{j\omega L} \left(1 + \frac{R}{j2\omega L}\right) \quad (9.22)$$

$$\simeq \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}} + j\omega\sqrt{LC} \quad (9.23)$$

¹Le Néper est lié au décibel par la relation suivante : $1 [Np] = 8,68 [dB]$.

Pour les développements, on considérera qu'à haute fréquence, C et L sont indépendants de la fréquence. De plus, en raison de l'effet de peau du conducteur (densité de courant non-uniforme dans toute la section du conducteur), on admet que R est proportionnel à \sqrt{f} :

$$R = R_0 \sqrt{f} \quad (9.24)$$

Dès lors, l'affaiblissement linéique évolue donc comme suit

$$\alpha = k \sqrt{f} L_o \quad (9.25)$$

où L_o désigne la longueur de la ligne.

Exprimons à présent l'atténuation en décibels

$$A [dB] = 20 \log \left[e^{-k \sqrt{f} L_o} \right] = \frac{20 \ln \left[e^{-k \sqrt{f} L_o} \right]}{\ln 10} \quad (9.26)$$

ce qui nous amène à la relation suivante

$$A [dB] = A_0 \sqrt{f} L_o \quad (9.27)$$

Dès lors, passer de L_o à $2L_o$ double les pertes. Cette équation est importante pour l'étude du transfert de puissance entre paires voisines.

9.3 Exemples de lignes

9.3.1 Lignes à paires symétriques

Elles sont constituées de deux paires identiques (lignes aériennes) ou vrillées (paires torsadées).

Comportement des câbles téléphoniques à basses fréquences

Pour un nombre élevé de communications téléphoniques, les lignes sont regroupées en *quartes* étoiles en fils de cuivre de 0,4 à 0,8 [mm] de diamètre. Le câble enterré ainsi conçu peut contenir plusieurs centaines de paires isolées par du polyéthylène. Aux fréquences vocales ($\omega L \ll R$), on peut montrer que

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega RC}{2}} \div \sqrt{f} \quad (9.28)$$

et

$$Z_c = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} \div \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (9.29)$$

Exemple. Ordre de grandeur des paramètres primaires pour une paire de diamètre 0,4 [mm] : $R = 290 [\Omega/km]$, $C = 50 [nF/km]$, $\alpha = 0,2 [Np/km]$ à 800 [Hz].

Ces lignes sont utilisées pour des liaisons à faible distance, par exemple entre abonnés et centraux téléphoniques.

Comportement des câbles téléphoniques à hautes fréquences

L'utilisation de câbles à hautes fréquences s'est développée par l'emploi de multiplexage fréquentiel à courants porteurs, permettant de transmettre sur un seul support symétrique un nombre élevé de voies téléphoniques. Ceci nécessite un affaiblissement aussi faible que possible.

Exemple. Ordre de grandeur des paramètres primaires et secondaires pour un diamètre de $0,9\text{ [mm]}$ avec isolation papier et $C = 31,5\text{ [nF/km]}$:

Fréquence	$R\text{ [}\Omega\text{/km]}$	$L\text{ [}\mu\text{H/km]}$	$ Z _c\text{ [}\Omega\text{]}$	$\alpha\text{ [mNp/km]}$
10 [kHz]	52,3	766	188	151
120 [kHz]	98,7	67,5	156	363

TAB. 9.1 – Ordres de grandeur des paramètres d'une ligne téléphonique.

Lignes pour transmissions numériques

Elles sont constituées de deux conducteurs métalliques torsadés présentant des caractéristiques identiques. Les conducteurs sont isolés par une couche de polyéthylène. Elles peuvent être utilisées pour le transport de signaux numériques et constituent un des supports les plus utilisés en tant que câble universel pour la téléphonie ou le transfert de données ou d'images à haut débit. Leur principal avantage est un faible coût et une grande facilité de mise en œuvre. Afin d'éviter une trop grande diaphonie entre lignes, les pas de torsade sont tous différents, évitant ainsi toute imbrication d'une ligne dans l'autre (on évite qu'une ligne soit constamment à côté d'une autre ligne, ce qui impliquerait un couplage capacitif).

Ces lignes sont assez limitées par rapport à la distance maximale sur laquelle elles peuvent transmettre l'information numérique sans régénération du signal qui est d'environ 100 [m] .

Dans un réseau local, les câbles peuvent être constitués de paires non blindées (UTP, *Unshielded Twisted Pair*), écrantées (FTP, *Foiled Twisted Pair*) ou écrantées paire par paire (STP, *Shielded Twisted Pair*). Leur impédance caractéristique est de 100, 120 ou $150\text{ [}\Omega\text{]}$. Les câbles sont classés par catégorie en fonction de leur bande passante (cf. tableau 9.2).

Catégorie	Bande passante	Exemples d'utilisation
1, 2		Distribution téléphonique (voix)
3	16 [MHz]	Voix numérique, réseaux locaux Ethernet 10 [Mb/s] et Any Lan
4	20 [MHz]	Réseaux Token Ring
5	100 [MHz]	Réseaux locaux Ethernet 10 et 100 [Mb/s], Token Ring et Any Lan

TAB. 9.2 – Catégories de câbles [30].

9.3.2 Lignes à paires coaxiales

Constitution

Elles sont constituées de deux conducteurs cylindriques concentriques séparés par un isolant (air ou diélectrique) et enveloppés dans une protection extérieure.

L'âme centrale peut être composée d'un ou de plusieurs fils de cuivre ou d'acier. L'isolant sert à séparer l'âme du conducteur extérieur. Les propriétés du câble sont principalement liées à la nature de cet isolant. Le conducteur extérieur est réalisé à partir de tresses, d'un tube ou d'une feuille de cuivre ou d'aluminium. La gaine extérieure, généralement en PVC, téflon ou polyéthylène (PE), sert de protection mécanique et chimique. Elle peut elle-même être incluse dans une enveloppe supplémentaire (en plomb, fibre de verre ou métallique) pour des conditions extrêmes d'utilisation.

Propriétés

La figure représente une vue de face d'un câble coaxial.

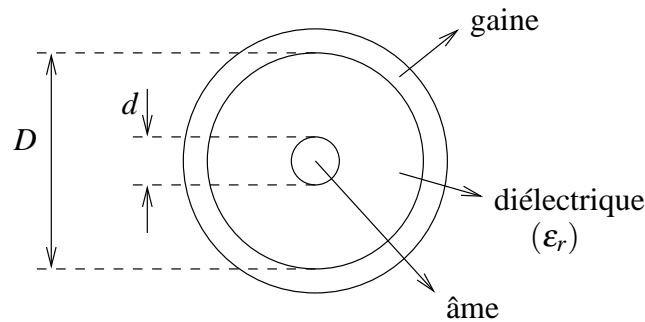


FIG. 9.8 – Vue de face d'un câble coaxial.

Le rapport D/d des diamètres des conducteurs est directement lié à l'atténuation α . Certaines études ont montré qu'une atténuation minimale par unité de longueur est obtenue pour $D/d = 3,6$. Ainsi, la plupart des câbles commercialisés respectent ce rapport. Pour des conducteurs en cuivre :

$$\alpha [Np/km] = \frac{0,692 \times 10^{-3} \sqrt{\epsilon_r f} \left[\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right]}{\log(D/d)}$$

avec d et D en $[mm]$, f en $[Hz]$.

Le tableau 9.3 donne deux exemples des propriétés de différents câbles coaxiaux normalisés par l'ITU (cf. [13, page 66]).

Type	d [mm]	D [mm]	$Z_c [\Omega]$	$\alpha [dB/100m]$ à 200 [MHz]	$\alpha [dB/100m]$ à 3 [GHz]
RG58W	0,9	4,95	50	24	140
RG35BU	2,65	17,27	75	4,7	37

TAB. 9.3 – Caractéristiques de deux câbles coaxiaux.

Les deux grandes familles de coaxiaux utilisés ont une impédance caractéristique égale à 50 $[\Omega]$ ou 75 $[\Omega]$. Généralement, les coaxiaux 50 $[\Omega]$ sont utilisés pour des transmissions en bande de base, ceux de 75 $[\Omega]$ en large bande. Leurs applications principales concernent les transmissions numériques à haut débit (500 $[Mb/s]$), anciennement les transmissions téléphoniques sur des grandes distances ou la télévision par câble (300 $[MHz]$).

9.4 Réseau téléphonique

Le réseau téléphonique historique est constitué d'une série de paires de cuivre reliant chaque abonné au central. Notons qu'une paire est toujours dédiée à chaque utilisateur. La transmission s'effectue en général de manière analogique jusqu'au central téléphonique. À l'entrée du central, le

signal analogique est converti sous forme numérique et acheminé tel quel jusqu'au dernier central téléphonique. Le signal numérique est ensuite interpolé et transmis sur la paire de l'abonné destinataire. Ce schéma est illustré à la figure 9.9.

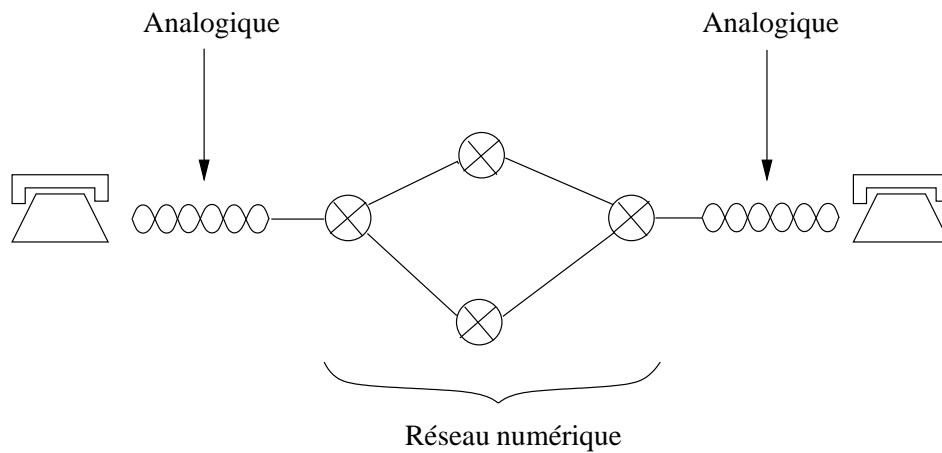


FIG. 9.9 – Ligne analogique.

À chaque passage dans un central, le signal numérique est commuté, c'est-à-dire qu'il passe systématiquement d'une entrée spécifique à une sortie spécifique. La commutation est rapide car le chemin de passage est établi lors de l'appel, pour toute la durée de l'appel. On parle de *circuit* ou de *mode connecté*².

En ce qui concerne la bande passante, l'opérateur garantit la délivrance d'un canal transparent pour les fréquences comprises dans l'intervalle $[300\text{ Hz}, 3400\text{ Hz}]$; on parle de la *bande vocale*. C'est donc dans cette bande qu'a lieu le transfert du signal vocal ainsi que des informations numériques transmises au moyen d'un modem.

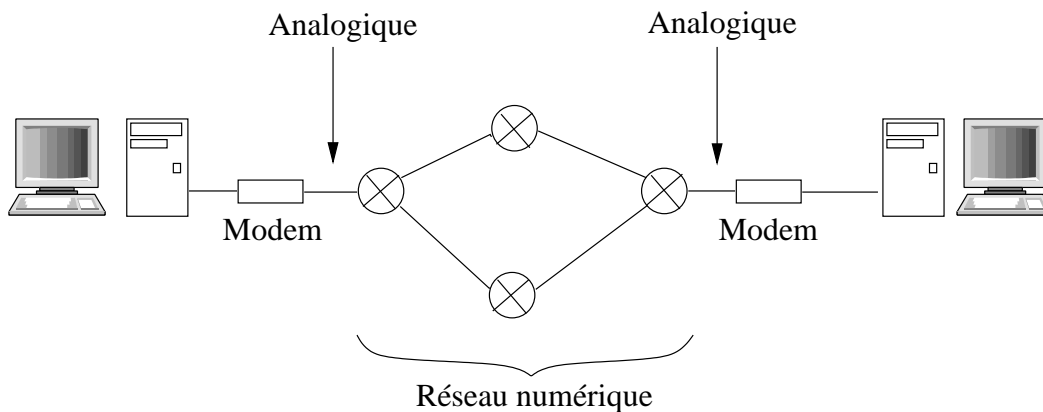


FIG. 9.10 – Transmission par modem dans la bande $[300\text{ Hz}, 3400\text{ Hz}]$.

Fort heureusement, la transmission par le biais de modems dans la bande vocale n'est pas le seul moyen de transmettre des informations numériques. Il est par exemple possible de recourir au *Réseau Numérique à Intégration de Services* (RNIS). Il s'agit d'un prolongement de l'accès numérique jusqu'à l'abonné.

Comme représenté à la figure 9.11, l'accès au RNIS se présente sous la forme d'un bus offrant plusieurs canaux en parallèle. Pour un accès de base, l'abonné dispose de 2 canaux à 64 kb/s . Ces

²À l'inverse, la commutation d'informations suivant le protocole IP se fait par *paquets*. Il n'y a pas de chemin préétabli pour toute la durée de l'échange.

canaux sont compatibles avec les canaux $64 [kb/s]$ utilisés entre centraux. Dès lors, il est tout à fait possible d'avoir une communication numérique à l'origine et une terminaison analogique.

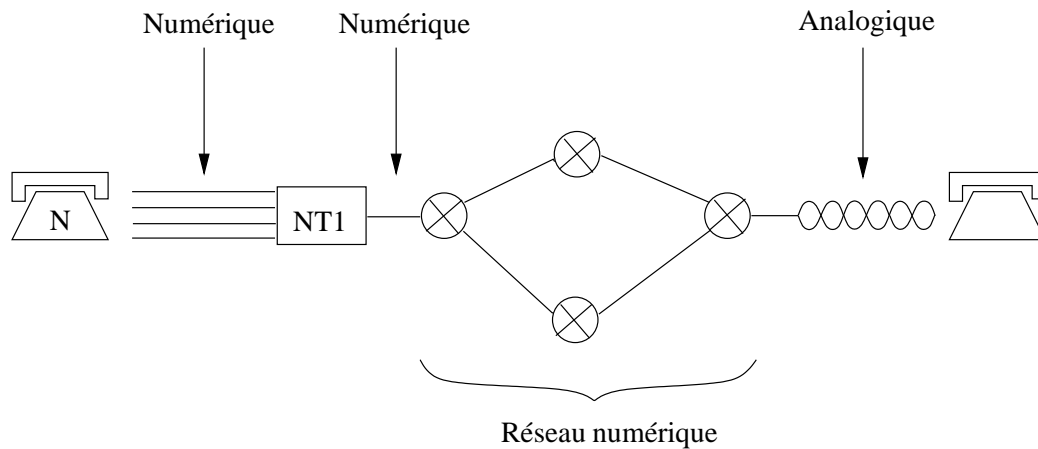


FIG. 9.11 – RNIS.

L'usage d'une bande de fréquences limitée à la bande $[300Hz, 3400Hz]$ n'a de sens que s'il s'agit d'établir une communication entre deux points distants. Bien entendu, rien n'interdit d'utiliser une bande plus large entre un abonné et le central téléphonique car le support est spécifique à un abonné. Le RNIS utilise cette astuce pour transmettre des signaux numériques dans une bande de fréquences, excédant la bande vocale, entre l'abonné et le central.

La transmission numérique à haut débit dans le réseau téléphonique par ADSL pousse le principe plus loin : la transmission de l'information numérique se fait hors bande vocale de manière à garantir la coexistence avec le signal vocal analogique usuel. Cette coexistence n'est effective que sur la paire dédiée car au franchissement du central téléphonique, les signaux sont séparés par filtrage et injectés dans des réseaux de transmission spécifiques. Cette séparation, effectuée au niveau du central téléphonique par un *splitter*, est illustrée à la figure 9.12.

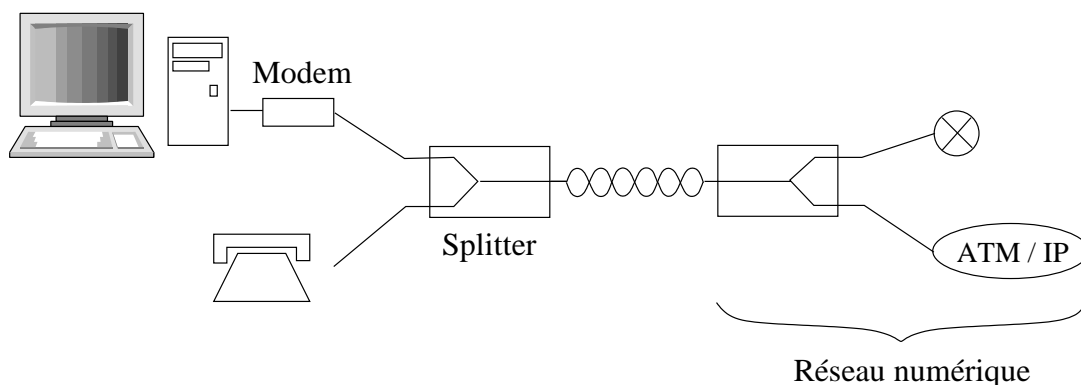


FIG. 9.12 – Configuration d'une connexion ADSL.

Du côté de l'abonné, on place un filtre qui sépare les bandes de fréquences ; ce filtre n'est en principe pas indispensable puisque les signaux vocaux et de données occupent des bandes distinctes. Ce filtre ainsi que sa courbe de gain³ (tension de sortie sur tension d'entrée, exprimé en $[dB]$) sont présentés à la figure 9.13.

³Le résultat des mesures a été fourni par Valéry BROWN.

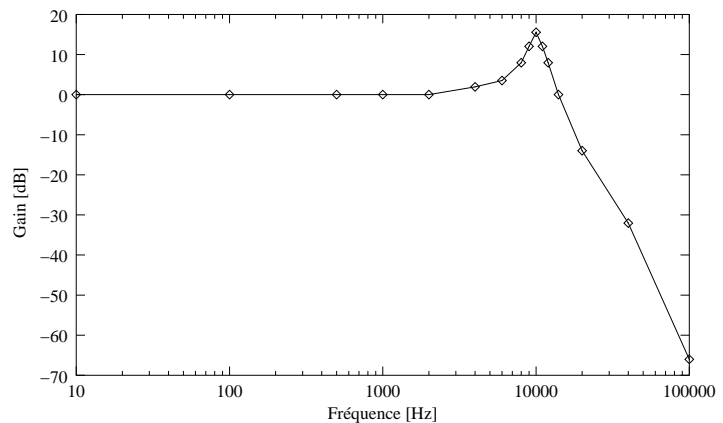


FIG. 9.13 – Filtre de séparation pour les signaux d’une ligne convertie à l’ADSL et sa courbe de gain.

9.5 Fonctions de transfert de puissance diaphoniques et transmission à haut débit

9.5.1 Principe

Lorsque deux lignes sont spatialement proches, il peut exister une influence parasite entre les signaux d’information qui sont véhiculés sur chaque voie. Cette perturbation est appelée *diaphonie*. L’origine physique de la diaphonie est l’existence d’un couplage capacitif et inductif entre les lignes considérées. Ce couplage est d’autant plus fort que les lignes sont proches. Ainsi, au sein d’un même faisceau (appelé *quarte*), les couplages sont particulièrement forts. C’est notamment le cas entre les paires 1 et 2 représentées à la figure 9.14.

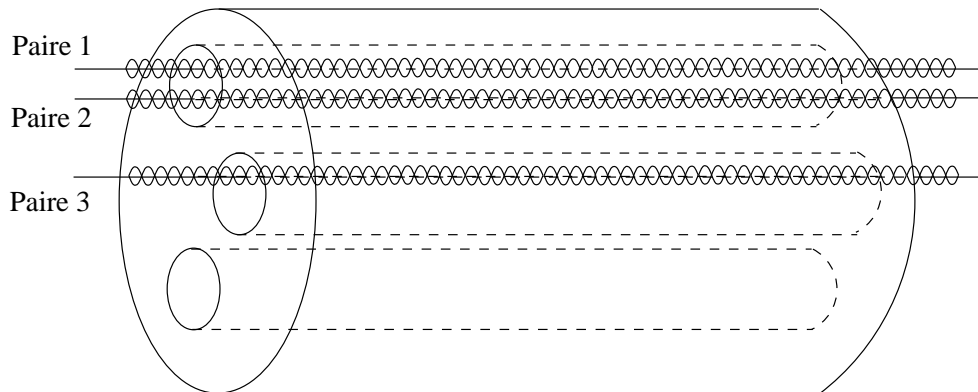


FIG. 9.14 – La diaphonie provient de la proximité des paires de cuivre.

Selon que la ligne perturbatrice provoque un parasite vers l’une ou l’autre des extrémités de la ligne parasitée, on parle de *paradiaphonie* ou de *télédiaphonie* (figure 9.15).

L’*affaiblissement paradiaphonique* est en particulier une grandeur importante dans la pratique pour caractériser un câble de transmission : il permet d’évaluer, à l’entrée d’une ligne perturbée, la perte de signal provoquée par la ligne perturbatrice voisine. Il dépend de la distance entre les lignes d’un même câble, des combinaisons des pas de torsades (pour les paires torsadées) et de la technique de construction du câble.

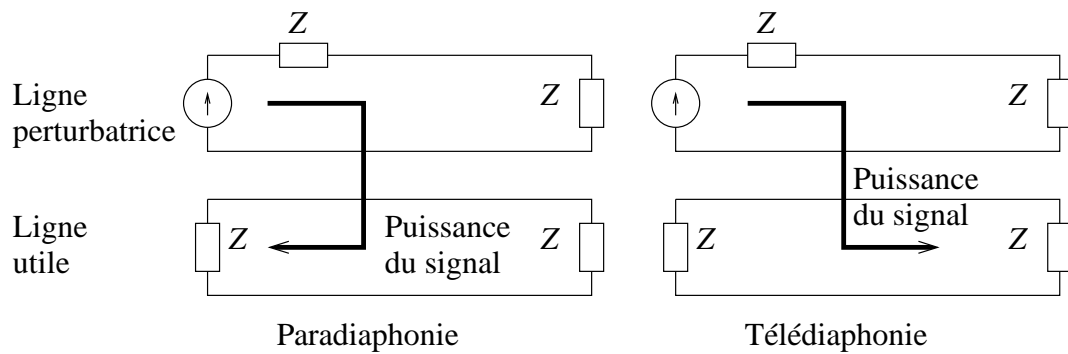


FIG. 9.15 – Paradiaphonie et télédiaphonie.

9.5.2 Diaphonie dans le réseau téléphonique

La diaphonie est bien présente dans le réseau téléphonique. En effet, les lignes sortent du central téléphonique dans des câbles pouvant atteindre plusieurs centaines, voire milliers de paires. Cette proximité entraîne des effets diaphoniques importants entre les paires.

La figure 9.16 montre la situation du réseau téléphonique. Le NEXT (*Near-End Crosstalk*) et le FEXT (*Far-End Crosstalk*) représentent respectivement la para et la télédiaphonie.

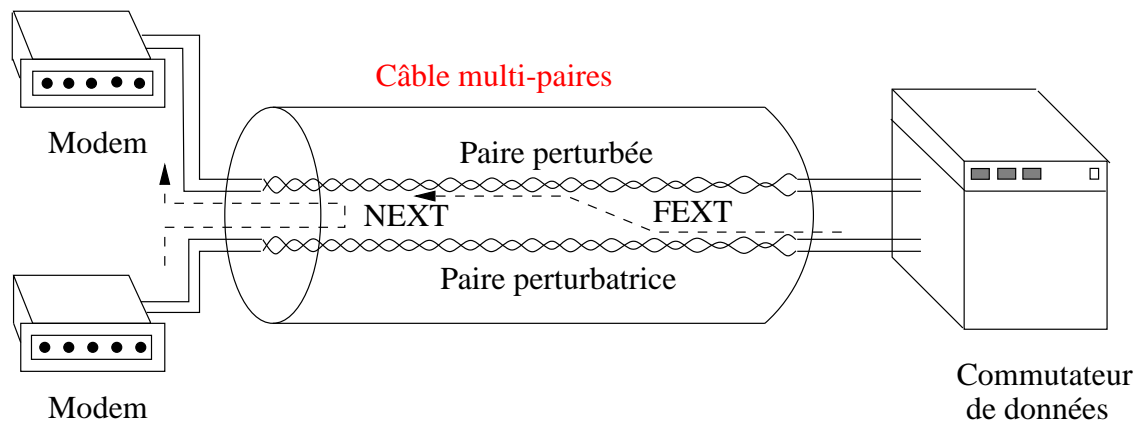


FIG. 9.16 – Diaphonie dans le réseau téléphonique.

En raison de la structure du réseau, les caractéristiques locales ne sont pas invariantes dans tout le réseau. L'approche analytique consiste à simplifier la situation pour aboutir à des conclusions de principe. On cherchera donc à établir *une fonction de transfert de puissance entre lignes de référence*.

On distingue deux types de modèle pour expliquer les phénomènes de diaphonie :

- le modèle des *capacités non équilibrées* et
- le modèle des *inductances non équilibrées*.

Nous allons étudier ces deux modèles.

Modèle des capacités non équilibrées

Ce modèle considère deux paires voisines, placées au dessus d'un écran. Comme le montre la figure 9.17, les quatre fils sont caractérisés par une impédance propre, une admittance avec les autres conducteurs et une capacité à une masse commune. On supposera raisonnablement que la conductance entre fils est nulle parce que les conducteurs sont enrobés d'un isolant.

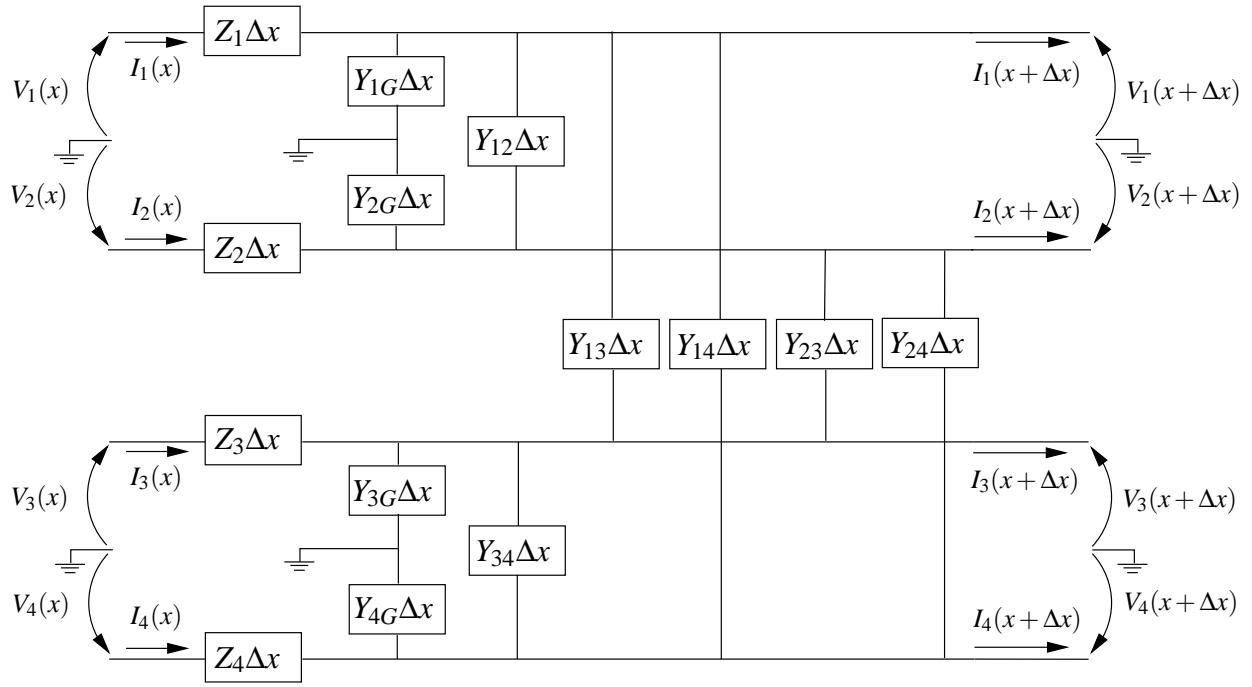


FIG. 9.17 – Modèle capacitif de deux paires.

Notions de circuit. Pour un système constitué de $N + 1$ conducteurs, on peut définir N tensions et N courants ; ces valeurs correspondent à N circuits. L'utilisation usuelle d'un câble à N conducteurs revient à considérer $N/2$ paires, elles-mêmes organisées en *quarte*. Ces paires servent à transmettre un signal en mode différentiel, c'est-à-dire de type $V_i - V_{i+1}$. Pour arriver à N circuits au total, il reste un solde théorique de $N/2$ circuits. Mais ces derniers sont délaissés en pratique en raison des effets diaphoniques inacceptables qu'ils induisent.

Calcul des relations entre courants et tensions. Pour la facilité, on écrit les capacitances comme des admittances : $Y = j\omega C$ (on admet que $G = 0$). Pour les calculs, nous utiliserons des tensions référencées par rapport à la masse.

L'application de la loi des mailles donne les équations suivantes

$$V_1(x + \Delta x) = V_1(x) - I_1(x)Z_1\Delta x \quad (9.30)$$

$$V_2(x + \Delta x) = V_2(x) - I_2(x)Z_2\Delta x \quad (9.31)$$

$$V_3(x + \Delta x) = V_3(x) - I_3(x)Z_3\Delta x \quad (9.32)$$

$$V_4(x + \Delta x) = V_4(x) - I_4(x)Z_4\Delta x \quad (9.33)$$

et l'application de la loi des nœuds fournit les équations suivantes

$$\begin{aligned} I_1(x + \Delta x) &= I_1(x) - V_1(x + \Delta x)Y_{1G}\Delta x - [V_1(x + \Delta x) - V_2(x + \Delta x)]Y_{12}\Delta x \\ &\quad - [V_1(x + \Delta x) - V_3(x + \Delta x)]Y_{13}\Delta x - [V_1(x + \Delta x) - V_4(x + \Delta x)]Y_{14}\Delta x \\ I_2(x + \Delta x) &= I_2(x) - V_2(x + \Delta x)Y_{2G}\Delta x - [V_2(x + \Delta x) - V_1(x + \Delta x)]Y_{12}\Delta x \\ &\quad - [V_2(x + \Delta x) - V_3(x + \Delta x)]Y_{23}\Delta x - [V_2(x + \Delta x) - V_4(x + \Delta x)]Y_{24}\Delta x \\ I_3(x + \Delta x) &= I_3(x) - V_3(x + \Delta x)Y_{3G}\Delta x - [V_3(x + \Delta x) - V_1(x + \Delta x)]Y_{13}\Delta x \\ &\quad - [V_3(x + \Delta x) - V_2(x + \Delta x)]Y_{23}\Delta x - [V_3(x + \Delta x) - V_4(x + \Delta x)]Y_{34}\Delta x \\ I_4(x + \Delta x) &= I_4(x) - V_4(x + \Delta x)Y_{4G}\Delta x - [V_4(x + \Delta x) - V_1(x + \Delta x)]Y_{14}\Delta x \\ &\quad - [V_4(x + \Delta x) - V_2(x + \Delta x)]Y_{24}\Delta x - [V_4(x + \Delta x) - V_3(x + \Delta x)]Y_{34}\Delta x \end{aligned}$$

Dans toutes ces équations, on peut passer à la limite $\Delta x \rightarrow 0$ après avoir divisé tous les membres par Δx . Se rappelant que la dérivée est définie par la formule suivante

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (9.34)$$

Les 8 équations s'expriment alors sous la forme matricielle suivante

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_4 \\ A_1 & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{12} & A_2 & Y_{23} & Y_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{13} & Y_{23} & A_3 & Y_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{14} & Y_{24} & Y_{34} & A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \underline{A} \vec{S} \quad (9.35)$$

où

$$A_1 = -(Y_{1G} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}) \quad (9.36)$$

$$A_2 = -(Y_{2G} + Y_{12} + Y_{23} + Y_{24}) \quad (9.37)$$

$$A_3 = -(Y_{3G} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{34}) \quad (9.38)$$

$$A_4 = -(Y_{4G} + Y_{14} + Y_{24} + Y_{34}) \quad (9.39)$$

Les tensions utiles s'exprimant comme une différence de tensions, on procède aux changements de variables suivants

$$V_{1M} = V_1 - V_2 \quad (9.40)$$

$$V_{2M} = V_3 - V_4 \quad (9.41)$$

$$V_{1L} = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (9.42)$$

$$V_{2L} = \frac{V_3 + V_4}{2} \quad (9.43)$$

$$I_{1M} = \frac{I_1 - I_2}{2} \quad (9.44)$$

$$I_{2M} = \frac{I_3 - I_4}{2} \quad (9.45)$$

$$I_{1L} = I_1 + I_2 \quad (9.46)$$

$$I_{2L} = I_3 + I_4 \quad (9.47)$$

Ces équations peuvent également être regroupées sous forme matricielle

$$\vec{S} = \underline{T} \begin{bmatrix} V_{1M} \\ V_{1L} \\ V_{2M} \\ V_{2L} \\ I_{1M} \\ I_{1L} \\ I_{2M} \\ I_{2L} \end{bmatrix} = \underline{T} \vec{S}' \quad (9.48)$$

où T est une matrice permettant d'effectuer le changement de variables

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (9.49)$$

Dès lors,

$$\vec{S'} = \underline{T}^{-1} \vec{S} \quad (9.50)$$

L'ensemble s'écrit finalement

$$\frac{d}{dx} \vec{S} = \underline{A} \vec{S} \quad (9.51)$$

$$\frac{d}{dx} \underline{T}^{-1} \vec{S} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \vec{S} \quad (9.52)$$

$$\frac{d}{dx} \vec{S'} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} \vec{S'} \quad (9.53)$$

La conséquence du changement de variables est le découplage des équations, c'est-à-dire qu'il est possible d'exprimer les courants uniquement en fonction des tensions. Dès lors, en remplaçant Y par $j\omega C$, on obtient

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I_{1M} \\ I_{1L} \\ I_{2M} \\ I_{2L} \end{bmatrix} = -\frac{j\omega}{4} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1M} \\ V_{1L} \\ V_{2M} \\ V_{2L} \end{bmatrix} \quad (9.54)$$

où

$$a_{11} = C_{1G} + C_{2G} + 4C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{23} + C_{24} \quad (9.55)$$

$$a_{21} = a_{12} = 2C_{1G} - 2C_{2G} + 2C_{13} + 2C_{14} - 2C_{23} - 2C_{24} \quad (9.56)$$

$$a_{31} = a_{13} = -C_{13} + C_{14} + C_{23} - C_{24} \quad (9.57)$$

$$a_{41} = a_{14} = -2C_{13} - 2C_{14} + 2C_{23} + 2C_{34} \quad (9.58)$$

$$a_{22} = 4C_{1G} + 4C_{2G} + 4C_{13} + 4C_{14} + 4C_{23} + 4C_{24} \quad (9.59)$$

$$a_{23} = a_{32} = -2C_{13} + 2C_{14} - 2C_{23} + 2C_{24} \quad (9.60)$$

$$a_{24} = a_{42} = -4C_{13} - 4C_{14} - 4C_{23} - 4C_{24} \quad (9.61)$$

$$a_{33} = C_{3G} + C_{4G} + C_{13} + C_{14} + C_{23} + C_{24} + 4C_{34} \quad (9.62)$$

$$a_{34} = a_{43} = 2C_{3G} - 2C_{4G} + 2C_{13} - 2C_{14} + 2C_{23} - 2C_{24} \quad (9.63)$$

$$a_{44} = 4C_{3G} + 4C_{4G} + 4C_{13} + 4C_{14} + 4C_{23} + 4C_{24} \quad (9.64)$$

Le paramètre a_{31} de ces équations détermine le couplage entre la tension sur une paire et le courant induit dans l'autre paire. Ce terme serait nul si toutes les capacitances étaient égales par couple. C'est

ce déséquilibre de capacités qui est à l'origine d'un effet diaphonique ; il s'exprime par ⁴

$$\frac{d}{dx} I_{2M} = -\frac{j\omega}{4} C_{M_1 M_2} V_{1M} \quad (9.65)$$

où $C_{M_1 M_2}$ est égal à a_{31} (ou a_{13}). Cette équation détermine donc le courant l'évolution du courant perturbateur dans la paire perturbatrice dû à une tension dans la paire perturbatrice. Les termes a_{12} et a_{21} sont eux liés au mode commun.

Modèle des inductances non équilibrées

Le modèles des inductances non équilibrées est similaire au précédent. Les circuits sont représentés par une série d'effets inductifs tels que repris à la figure 9.18.

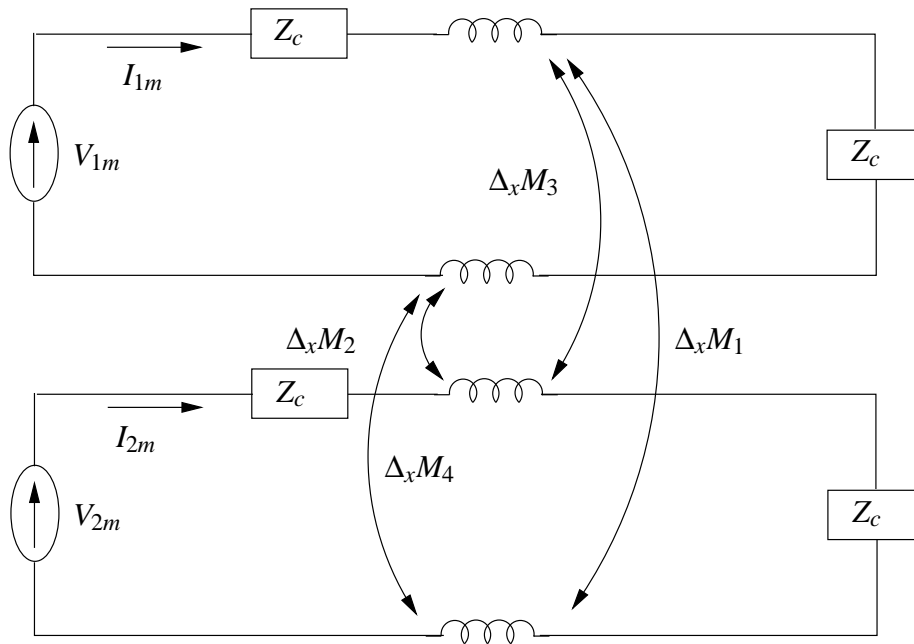


FIG. 9.18 – Modèle inductif de deux paires.

L'analyse détaillée de la question montre que la diaphonie se traduit également par l'apparition d'un courant induit dans une paire dû à une différence de tension appliquée à l'autre paire. Plus précisément,

$$\frac{d}{dx} I_{2M} \simeq \frac{j\omega M}{4Z_c^2} V_{1M} \quad (9.66)$$

où M vaut $M_1 + M_2 + M_3 + M_4$.

Conclusion

Il apparaît donc que les effets des deux modèles fournissent un courant perturbateur tel que

$$\frac{d}{dx} I_{2M} = \left(\frac{j\omega M}{4Z_c^2} - \frac{j\omega}{4} C_{M_1 M_2} \right) V_{1M} \quad (9.67)$$

⁴L'équation 9.65 néglige le terme de diaphonie dû à la tension V_{1L} de mode commun car, lors de l'installation des lignes, l'opérateur s'arrange pour avoir un rapport de mode différentiel à mode commun de 35 à 55 [dB].

que l'on écrira plus généralement

$$\frac{d}{dx}I_{2M} = j\omega Q_{M_1M_2}V_{1M} \quad (9.68)$$

où $Q_{M_1M_2}$ tient compte des effets capacitifs et inductifs.

9.5.3 Calcul du NEXT

Les formules précédentes liaient les valeurs locales des courants et des tensions. Pour obtenir des résultats macroscopiques, il suffit d'intégrer les expressions locales en tenant compte de la dimension stochastique des phénomènes observés.

Le schéma de principe est illustré à la figure 9.19. Prenons une paire perturbatrice à l'entrée de laquelle on applique une tension V_0 . Ce signal de tension parcourt la ligne jusqu'au point x_1 .

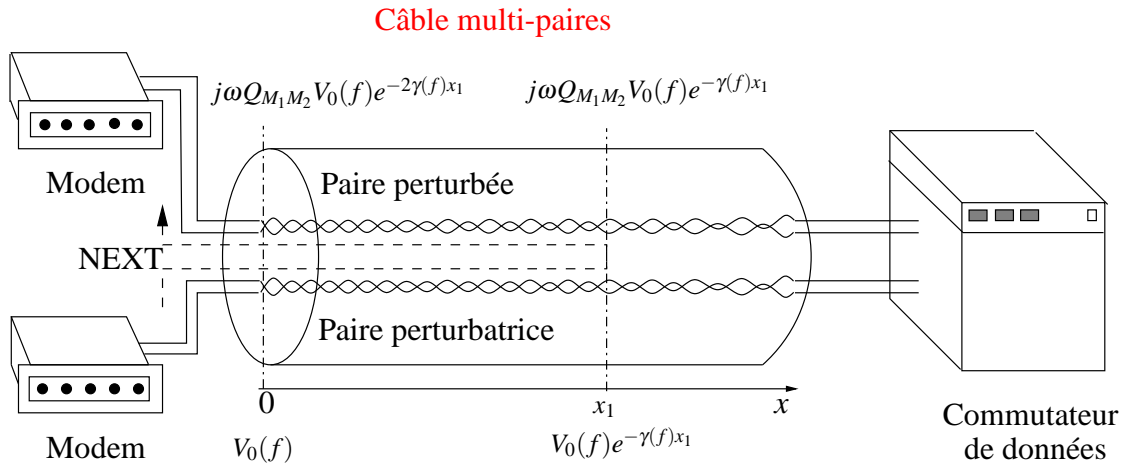


FIG. 9.19 – Paradiaphonie au droit de x_1 .

Au droit de x_1 , la tension sur la paire perturbatrice vaut

$$V_0(f)e^{-\gamma(f)x_1} \quad (9.69)$$

Le courant diaphonique induit sur la paire perturbée s'obtient en exploitant la relation 9.68

$$\frac{d}{dx}I_2(f, x_1) = j\omega Q_{M_1M_2}V_1(f, x_1) = j\omega Q_{M_1M_2}V_0(f)e^{-\gamma(f)x_1} \quad (9.70)$$

Pour que ce signal perturbe la seconde paire, il faut qu'il parvienne à son extrémité. À l'origine, le courant induit vaut

$$\frac{d}{dx}I_2(f, 0) = \frac{d}{dx}I_2(f, x_1)e^{-\gamma(f)x_1} = j\omega Q_{M_1M_2}V_0(f)e^{-2\gamma(f)x_1} \quad (9.71)$$

Pour obtenir la totalité du signal perturbateur sur la seconde paire, il suffit d'intégrer sur l'ensemble des positions x_1 , c'est-à-dire sur toute la longueur de la zone d'interférence L . Dès lors,

$$I_2(f) = \int_0^L j\omega Q_{M_1M_2}(x)V_0(f)e^{-2\gamma(f)x}dx \quad (9.72)$$

Cette expression représente donc le courant généré dans la paire perturbée dû à une tension dans la paire perturbatrice, ramenée à l'entrée du câble. En terme de puissance, le signal perturbateur s'exprime par

$$P_2(f) = V_2(f)I_2^*(f) = Z_L I_2(f)I_2^*(f) \quad (9.73)$$

où Z_L est l'impédance de la charge qui termine la ligne. La résolution de l'intégrale sous forme analytique n'est malheureusement pas possible car la quantité $Q_{M_1M_2}$ n'est pas connue ; on peut donc la traiter comme une variable aléatoire et dès lors rechercher l'expression d'une puissance moyenne. En supposant que la charge Z_L est adaptée à l'impédance de ligne Z_c , il y a donc uniquement un transit de puissance active. Ainsi, la puissance moyenne est donnée par l'expression suivante

$$\begin{aligned} E \{P_2(f)\} &= E \left\{ R_L V_0^2(f) \int_0^L j\omega Q_{M_1M_2}(x) e^{-2\gamma(f)x} dx \int_0^L -j\omega Q_{M_1M_2}^*(y) e^{-2\gamma^*(f)y} dy \right\} \\ &= R_L \omega^2 V_0^2(f) E \left\{ \int_0^L \int_0^L Q_{M_1M_2}(x) Q_{M_1M_2}^*(y) e^{-2\gamma(f)x} e^{-2\gamma^*(f)y} dx dy \right\} \end{aligned} \quad (9.74)$$

$$= R_L \omega^2 V_0^2(f) \int_0^L \int_0^L E \{ Q_{M_1M_2}(x) Q_{M_1M_2}^*(y) \} e^{-2\gamma(f)x} e^{-2\gamma^*(f)y} dx dy \quad (9.75)$$

Une hypothèse réaliste consiste à considérer que $Q_{M_1M_2}(x)$ et $Q_{M_1M_2}^*(y)$ sont deux variables non corrélées, ce qui implique que la variable aléatoire $Q_{M_1M_2}(x) Q_{M_1M_2}^*(y)$ n'aura une valeur non nulle que si $x = y$ d'où

$$E \{ Q_{M_1M_2}(x) Q_{M_1M_2}^*(y) \} = k \delta(x - y) \quad (9.76)$$

Cette hypothèse est un artifice de calcul commode mais son interprétation physique est malaisée. Notons néanmoins que $Q_{M_1M_2}(x)$ peut prendre des valeurs négatives ; l'espérance peut donc s'annuler. Grâce à cette hypothèse,

$$\begin{aligned} E \{P_2(f)\} &= R_L \omega^2 V_0^2(f) \int_0^L \int_0^L k \delta(x - y) e^{-2\gamma(f)x} e^{-2\gamma^*(f)y} dx dy \\ &= R_L \omega^2 V_0^2(f) k \int_0^L e^{-2\gamma(f)x} e^{-2\gamma^*(f)x} dx \end{aligned} \quad (9.77)$$

$$= R_L \omega^2 V_0^2(f) k \int_0^L e^{-4\alpha(f)x} dx \quad (9.78)$$

$$= R_L \omega^2 V_0^2(f) k \left[\frac{e^{-4\alpha(f)x}}{-4\alpha(f)} \right]_0^L \quad (9.79)$$

$$= \frac{R_L \omega^2 V_0^2(f) k}{-4\alpha(f)} (e^{-4\alpha(f)L} - 1) \quad (9.80)$$

Pour des lignes suffisamment longues,

$$E \{P_2(f)\} = \frac{R_L \omega^2 V_0^2(f) k}{4\alpha(f)} \quad (9.81)$$

À haute fréquence (ce qui est le cas pour l'ADSL), on sait que α est proportionnel à \sqrt{f} . D'où

$$H_{NEXT}(f) = \frac{R_L \omega^2 k}{4\alpha(f)} = \frac{k' f^2}{\alpha_0 \sqrt{f}} = K_{NEXT} f^{\frac{3}{2}} \quad (9.82)$$

Cette expression représente la fonction de transfert *en puissance* de la paradiaphonie (NEXT), qui permet de calculer la densité spectrale de puissance sur la ligne perturbée due à une densité spectrale de puissance sur la ligne perturbatrice. Cette fonction de transfert est donc proportionnelle à la fréquence. De plus, l'interférence de diaphonie ne dépend pas de la longueur. Ce résultat, assez inattendu, provient du fait que les effets de diaphonie à proximité de l'extrémité supplantent les contributions diaphoniques des tronçons éloignés, les effets à courte distance dominent donc.

9.5.4 Calcul du FEXT

Tout comme dans le cas du NEXT, on peut calculer la puissance du FEXT à partir de la relation locale 9.68. Pour aboutir au résultat final, on procède par intégration sur base du schéma de la figure 9.20.

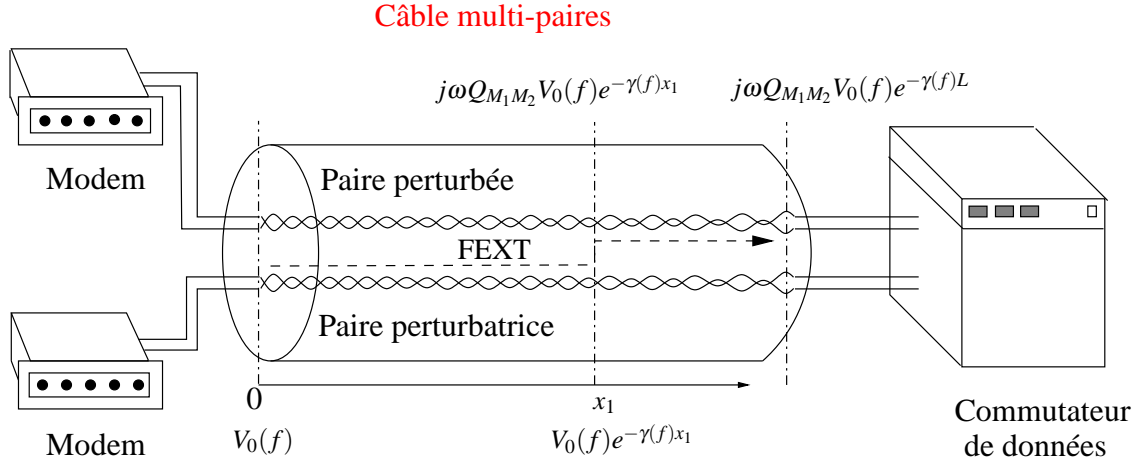


FIG. 9.20 – Télédiaphonie au droit de x_1 .

Les calculs mènent à une fonction de transfert en puissance d'expression

$$H_{FEXT}(f) = k_{FEXT} f^2 e^{-2\alpha(f)L} \quad (9.83)$$

où L est la longueur du tronçon sur lequel agit le FEXT.

Contrairement au NEXT, le FEXT dépend de la longueur de la zone d'interférence ; il augmente également avec la fréquence.

9.5.5 Rapport signal sur bruit

Les fonctions de transfert du NEXT et du FEXT permettent de dériver un rapport signal sur bruit du canal constitué par la paire perturbée.

Dans le cas du FEXT, la densité spectrale de puissance à la sortie de la paire est la somme de la densité spectrale de puissance du signal utile et de celle du FEXT. Suivant les conventions de la figure 9.21 et par application du théorème de WIENER-KINTCHINE, on obtient

$$\gamma_R(f) = \gamma_E(f) \|\mathcal{H}_c(f)\|^2 + \gamma_P(f) H_{FEXT}(f) \quad (9.84)$$

où $\gamma_E(f) \|\mathcal{H}_c(f)\|^2$ représente la densité spectrale de puissance du signal utile à la sortie de la paire et $\gamma_P(f) H_{FEXT}(f)$, la densité spectrale de puissance due au FEXT à l'entrée du récepteur.

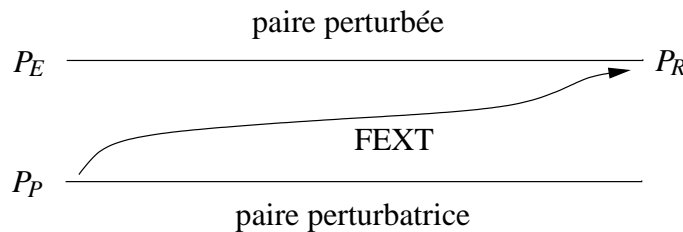


FIG. 9.21 – Calcul de la densité spectrale de puissance en sortie de la paire en présence de FEXT.

On en déduit l'expression du rapport signal sur bruit

$$\frac{S(f)}{N(f)} = \frac{\gamma_E(f) \|\mathcal{H}_c(f)\|^2}{\gamma_P(f) H_{FEXT}(f)} \quad (9.85)$$

$$= \frac{\gamma_E(f) \|\mathcal{H}_c(f)\|^2}{\gamma_P(f) L f^2 k_{FEXT} \|\mathcal{H}_c(f)\|^2} \quad (9.86)$$

$$= \frac{1}{L f^2 k_{FEXT}} \quad (9.87)$$

$$= \frac{k'}{L f^2} \quad (9.88)$$

Une formule identique peut être dérivée dans le cas du NEXT, ce qui donne deux expressions du rapport signal sur bruit. On peut constater que l'expression du canal n'intervient pas dans ces formules.

9.5.6 Influence du nombre de perturbateurs

Supposons le câble constitué de N lignes perturbatrices. Une idée simple consiste à sommer l'effet individuel des N lignes. Dès lors, la densité spectrale de puissance en sortie est donnée par

$$\gamma_{out}(f) = \sum_{i=1}^N \gamma_{in_i}(f) H_{FEXT/NEXT}(f) \quad (9.89)$$

Si, en plus, on fait l'hypothèse que tous les signaux perturbateurs ont la même densité spectrale de puissance,

$$\gamma_{out}(f) = N \gamma_{in}(f) H_{FEXT/NEXT}(f) \quad (9.90)$$

Cette formule surévalue la puissance perturbatrice car les paires très éloignées de la paire perturbée influencent peu cette dernière. Le facteur à considérer est dès lors inférieur à N . Il est donc nécessaire de mener une étude statistique. UNGER a proposé la formule empirique suivante

$$\gamma_{out}(f) = N^{0,6} \gamma_{in}(f) H_{FEXT/NEXT}(f) \quad (9.91)$$

9.6 Estimation de la capacité de canal

De manière à établir une formule permettant d'estimer la capacité de canal, c'est-à-dire le nombre maximum de bit par seconde qu'il est possible de transmettre sur un canal bruité (une paire téléphonique dans notre cas), il est nécessaire de rappeler les principaux résultats de la théorie de l'information.

9.6.1 Information, incertitude et entropie

Notion d'information

Considérons une source pouvant émettre deux symboles s_0 et s_1 avec les probabilités respectives p_0 et p_1 . Celle-ci peut dès lors être vue comme une variable aléatoire discrète. Nous considérons la source sans mémoire, c'est-à-dire que le symbole émis à un certain temps est indépendant des symboles émis précédemment.

Supposons que la source émette un symbole. Si une des deux probabilités est unitaire, il n'y a pas de surprise à la sortie et donc aucune information (on connaît le symbole qui va être émis). Dans le cas où l'émission des symboles est équiprobable ($p_0 = p_1 = 0,5$), une grande incertitude subsiste sur le symbole émis et la réception du symbole émis apporte beaucoup d'information. On peut ainsi caractériser l'information par la probabilité d'émission des symboles.

Définition 39 [Information d'un symbole] *Dès lors, le gain en information apporté par l'observation de l'événement $S = s_k$, de probabilité p_k est donné par l'information de symbole telle que définie par*

$$i(s_k) = \log_2 \left(\frac{1}{p_k} \right) = -\log_2 p_k \quad (9.92)$$

L'information est nulle quand p_k vaut 1 –ce que l'on peut interpréter comme le fait que la réalisation d'un événement certain n'apporte aucune information– et elle augmente à mesure que p_k diminue. Cette grandeur s'exprime en *bit d'information*. Il convient de ne pas confondre le *bit* et le *bit d'information* qui représentent respectivement les mesures du débit et du débit d'information. Ainsi, il est tout à fait possible d'avoir un nombre de bits d'information qui ne soit pas un nombre entier. En pratique, on ne retrouve guère cette nuance puisque le terme *bit* est utilisé pour les deux notions. Il faudra donc recourir au contexte pour rétablir la distinction.

Notion d'entropie

Soit une source S comprenant K symboles. On cherche à caractériser l'information moyenne fournie par chaque symbole émis.

Définition 40 *Cette grandeur est appelée entropie de la source et notée $H(S)$. Dès lors,*

$$H(S) = \sum_{k=0}^{K-1} p_k \log_2 \left(\frac{1}{p_k} \right) \quad (9.93)$$

Dans le cas d'une source binaire, on peut considérer deux cas particuliers :

1. le cas où tous les symboles sont équiprobables. On montre alors que $H(S) = 1$, ce qui implique que l'information apportée lors de l'observation du symbole vaut un bit.
2. le cas où une probabilité p_k vaut 1. Alors $H(S) = 0$; l'information apportée lors de l'observation du symbole est nulle car on sait a priori quel symbole va être émis par la source.

9.6.2 Canal discret sans mémoire

Dans le cas où le canal n'est pas bruité, lorsque l'on injecte un symbole dans le canal, on peut prédire la valeur du symbole de sortie avec certitude. En présence de bruit, une certaine incertitude subsiste à la réception du symbole. Cette incertitude est liée au fait qu'il existe une certaine probabilité d'erreur, le canal n'étant plus parfait. Par ailleurs, il se peut fort bien qu'un alphabet de sortie diffère sensiblement en taille de l'alphabet d'entrée.

Modèle de canal

Considérons un canal discret (les alphabets d'entrée et de sortie sont de taille finie) et sans mémoire. L'absence de mémoire signifie que le symbole de sortie courant ne dépend que du symbole d'entrée courant. Le schéma du système est alors celui fourni à la figure 9.22. Les probabilités $p(y_k|x_j)$

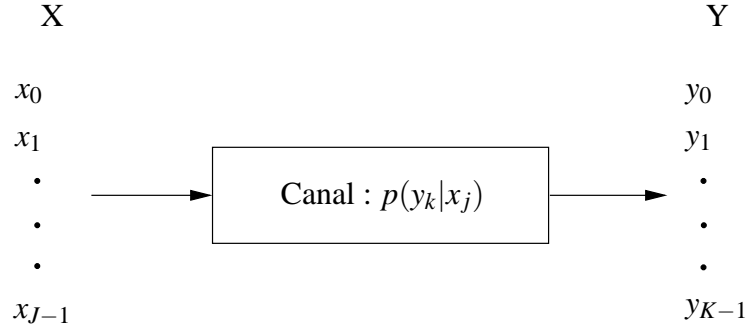


FIG. 9.22 – Modèle du canal discret sans mémoire.

représentent les probabilités de transition d'un symbole de l'alphabet d'entrée vers un symboles de l'alphabet de sortie. Elles peuvent être regroupées dans une matrice, appelée *matrice de canal*.

Idéalement, $p(y_k|x_j) = 0$ si $k \neq j$ en l'absence de bruit ou de tout pré-codage. En pratique, on doit toujours tenir compte des probabilités croisées.

9.6.3 Information mutuelle

Pour un canal bruité, la question posée est de savoir quelle incertitude subsiste sur l'entrée X après avoir observé la sortie $Y = y_k$. Pour répondre à cette question, définissons l'entropie de X conditionnellement à Y , sachant que $Y = y_k$ de la manière suivante

$$H(X|Y = y_k) = \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_j|y_k)} \right) \quad (9.94)$$

Cette formule nous donne dès lors l'incertitude subsistant sur la valeur de l'entrée connaissant la valeur y_k de la sortie. Il serait intéressant d'avoir une moyenne de cette information pour toutes les valeurs de Y et donc pour toutes les sorties possibles, c'est l'*entropie conditionnelle* $H(X|Y)$, donnée par

$$H(X|Y) = \sum_{k=0}^{K-1} H(X|Y = y_k) p(y_k) \quad (9.95)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k) p(y_k) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_j|y_k)} \right) \quad (9.96)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_j|y_k)} \right) \quad (9.97)$$

On définit alors l'*information mutuelle* moyenne $I(X;Y)$ comme la quantité d'information, et donc d'entropie, que l'on retrouve en sortie du canal (et donc qui n'a pas été affecté par le bruit). Dès lors,

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (9.98)$$

On peut illustrer cette définition dans deux cas particuliers :

1. le cas d'un *canal sans bruit*. Alors, $H(X|Y) = 0$ car connaissant le symbole de sortie, il est possible de déterminer avec certitude le symbole d'entrée. Aussi $I(X;Y) = H(X)$: le canal arrive donc bien à véhiculer l'information jusqu'au récepteur.

2. le cas d'un *canal fortement bruité* au point que tous les symboles soient équiprobables. Alors $H(X|Y) = H(X)$, car l'analyse de la sortie ne permet pas d'obtenir la moindre information sur l'entrée. Ainsi donc, $I(X;Y)$ est nulle ; le canal ne transmet aucune information.

On peut montrer que l'information mutuelle moyenne possède notamment la propriété d'être symétrique, dès lors $I(X;Y) = I(Y;X)$, on en déduit que

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (9.99)$$

$$I(Y;X) = H(Y) - H(Y|X) \quad (9.100)$$

9.6.4 Capacité de canal

La notion d'information mutuelle nous permet d'introduire la notion de *capacité de canal*.

Définition 41 On définit la capacité (maximale) d'un canal comme le maximum de l'information mutuelle moyenne où la maximisation se fait sur la distribution de probabilité des symboles d'entrée

$$C_s = \max_{\{p(x_j)\}} I(X;Y) \quad (9.101)$$

Cette définition représente donc la meilleure utilisation que l'on peut faire du canal et elle est indépendante de la distribution de probabilités des symboles de l'alphabet d'entrée. Il s'agit évidemment d'une capacité théorique que l'on pourra utiliser comme référence pour la mise au point de technique de transmission.

Remarquons enfin que la relation 9.101 définit une capacité de canal par symbole. Si le canal est capable de traiter s symboles par seconde, la capacité par seconde est donnée par

$$C = sC_s \quad (9.102)$$

Estimation de la capacité d'un canal binaire symétrique

Considérons le schéma de la figure 9.23.

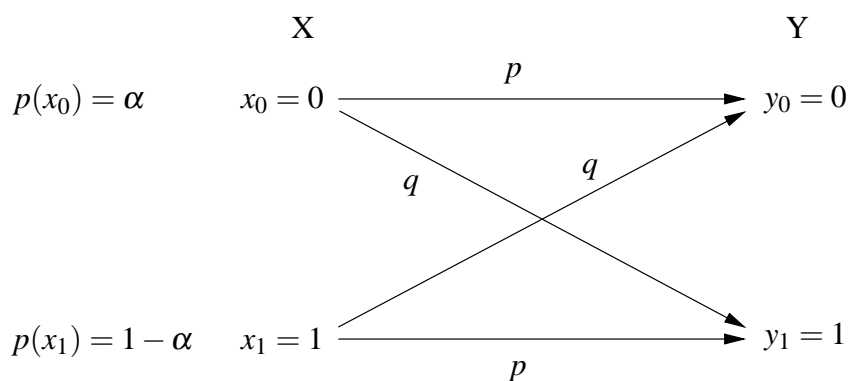


FIG. 9.23 – Calcul de la capacité de canal d'un canal binaire symétrique.

La capacité du canal s'exprime par

$$C_s = \max_{\{p(x_j)\}} I(X;Y) \quad (9.103)$$

$$= \max_{\{p(x_j)\}} [H(X) - H(X|Y)] \quad (9.104)$$

$$= \max_{\{p(x_j)\}} [H(Y) - H(Y|X)] \quad (9.105)$$

Calculons l'entropie conditionnelle $H(Y|X)$. Pour ce faire, appliquons la formule 9.96 adaptée. Pour la paire entrée-sortie (x_0, y_0) , on obtient

$$H(Y|X)_{(x_0, y_0)} = -p(x_0)p(y_0|x_0) \log_2(p(y_0|x_0)) \quad (9.106)$$

Sachant que la probabilité d'émission du symbole x_0 vaut α et que la probabilité conditionnelle $p(y_0|x_0)$ vaut p (cf. figure 9.23), on obtient

$$H(Y|X)_{(x_0, y_0)} = -\alpha p \log_2 p \quad (9.107)$$

En effectuant de même pour toutes les combinaisons entrée-sortie $((x_1, y_0), (x_0, y_1)$ et $(x_1, y_1))$ et en sommant les différentes contributions, on trouve

$$H(Y|X) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 H(Y|X)_{(x_i, y_j)} \quad (9.108)$$

$$= -p \log_2 p - q \log_2 q \quad (9.109)$$

On constate donc que $H(Y|X)$ ne dépend que des caractéristiques du canal, on parle d'entropie de canal. Dès lors,

$$I(X; Y) = H(Y) + p \log_2 p + q \log_2 q \quad (9.110)$$

Pour maximiser cette quantité, on ne peut plus jouer que sur $H(Y)$. Le maximum que l'on peut obtenir avec un canal binaire est une valeur unitaire pour $H(Y)$. La capacité maximale de canal est alors

$$C_s = 1 + p \log_2 p + q \log_2 q \quad (9.111)$$

Sur le schéma de la figure 9.23, q représente la probabilité de prendre une décision erronée ; c'est la probabilité d'erreur. Dans le cas d'une modulation à deux états, la probabilité d'erreur est liée au rapport signal à bruit par la relation

$$q = p_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (9.112)$$

L'évolution de la capacité de canal en fonction du rapport signal sur bruit est représentée à la figure 9.24. On constate que, lorsque le rapport signal sur bruit tend vers l'infini (c'est-à-dire que la probabilité d'erreur tend vers 0), la capacité maximale du canal tend vers 1 bit.

Influence du type de modulation

Prenons le cas d'une modulation à quatre états (4-AM par exemple). La matrice de canal se complique car il faut calculer plusieurs probabilités d'erreur pour un symbole d'entrée donné.

Cependant, l'expression de la capacité de canal reste de la forme

$$C_s = H(Y) + H_c \quad (9.113)$$

où la valeur maximale de $H(Y)$ est de deux, la conséquence d'une modulation à quatre états étant que l'on a deux bits par symbole et où H_c est un terme associé aux transitions de canal. Il est alors intuitivement acceptable que la capacité de canal tende vers deux quand le rapport signal à bruit tend vers l'infini. Le raisonnement peut être répété pour des modulations à 16 voire 64 états. Les résultats sont résumés à la figure 9.24.

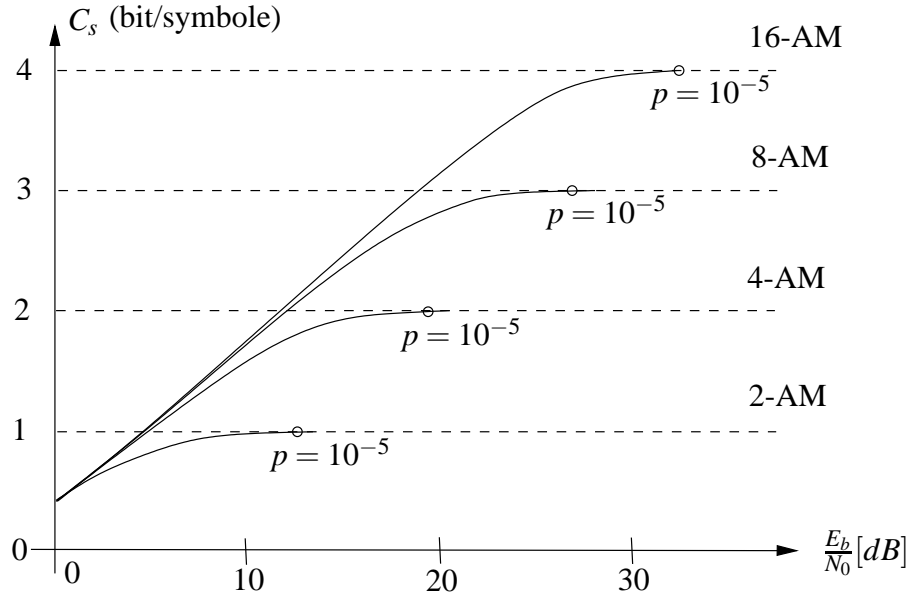


FIG. 9.24 – Capacité de canal pour différents types de modulation.

Généralisation au cas continu et second théorème de SHANNON

Dans le cas où l'on considère des alphabets d'entrée et de sortie continus, le calcul de la capacité de canal s'en trouve très fortement compliqué. Pour un canal blanc additif gaussien de moyenne nulle et de variance σ_N^2 , la sortie vaut

$$Y = X + N(0, \sigma_N^2) \quad (9.114)$$

Pour le calcul de la capacité de canal, on impose en outre une limitation de la puissance d'entrée à σ_X^2 .

Théorème 42 [SHANNON] *Des calculs montrent que la capacité d'un canal blanc additif gaussien de moyenne nulle et de variance σ_N^2 s'exprime par*

$$C_s = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2} \right) \quad (9.115)$$

où $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2}$ représente le rapport signal sur bruit.

Cette formule porte le nom de *second théorème de SHANNON*. On constate que, dans le cas d'un bruit important ($\sigma_N^2 \gg \sigma_X^2$), le canal ne parvient pas à transmettre de l'information. La figure 9.25 compare la limite théorique de SHANNON avec les capacités maximales atteintes par les différentes techniques de modulation. Il est intéressant de noter que la limite théorique de SHANNON correspond au cas d'une modulation comportant un nombre infini d'états.

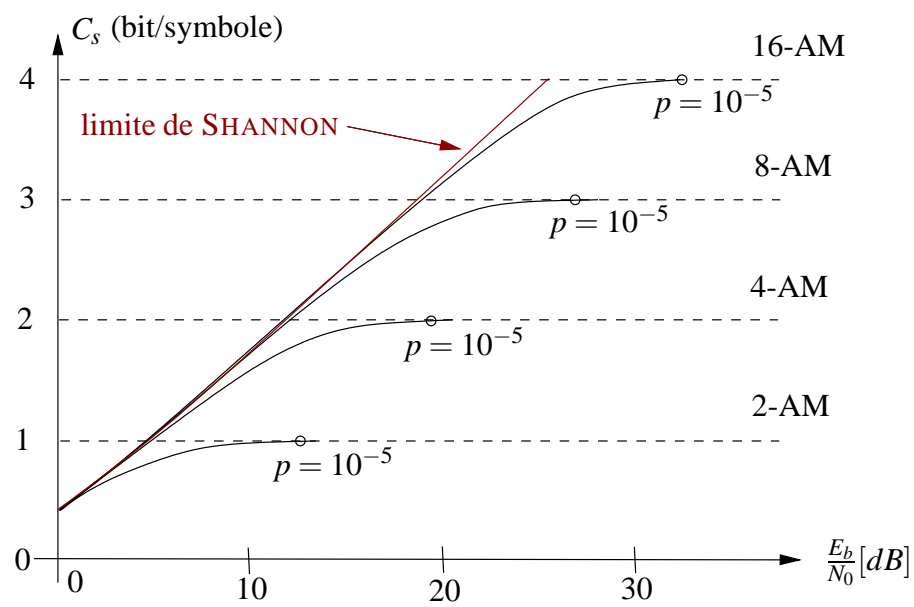


FIG. 9.25 – Second théorème de SHANNON.

Chapitre 10

Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres

Ce chapitre aborde l'étude de la partie radio des réseaux de radiocommunications mobiles terrestres. Les aspects systèmes ne seront pas couverts.

10.1 Introduction

La figure 10.1 représente les éléments qui interviennent dans le calcul du bilan de puissance d'une liaison sans fil. On distingue les pertes d'émission (L_E) et de réception (L_R), dues aux lignes de transmission reliant les équipements aux antennes ainsi qu'à certains équipements intermédiaires (duplexeurs, connecteurs, ...), les gains d'antenne et l'affaiblissement dans l'espace (A_e).

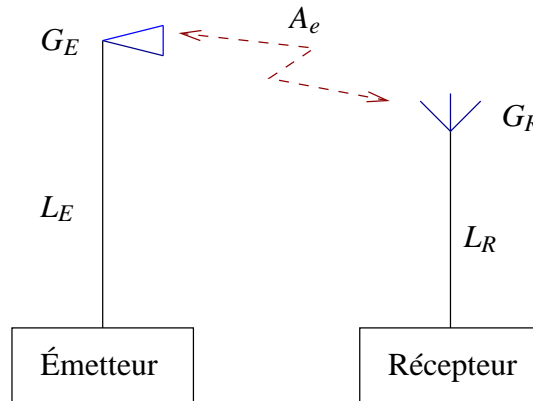


FIG. 10.1 – Éléments intervenant dans le calcul du budget de puissance d'une liaison sans fil.

Dès lors, la puissance de réception P_R , exprimée en $[dB]$, vaut

$$P_R = P_E - L_E + G_E - A_e + G_R - L_R \quad (10.1)$$

où P_E désigne la puissance d'émission. Le terme d'affaiblissement en espace est délicat s'agissant de communications mobiles. En effet, le modèle de propagation en espace libre (cf. relation de Friis) convient raisonnablement bien pour des communications en ligne de vue –on parle de situation de *Line of Sight* (LOS) dans la littérature– et dans un espace dégagé, mais il s'avère inadéquat pour des communications radiomobiles. En effet, le signal détecté au récepteur comporte éventuellement l'onde émise en ligne de vue¹ et une série d'ondes diffractées ou réfléchies à la même fréquence ;

¹En fait, cette situation est rare dans le contexte d'une radiocommunication mobile.

c'est une situation typique de *multitrajet*.

Le signal reçu est donc affecté de plusieurs effets de distorsion :

- distorsion de la valeur instantanée de l'*amplitude*, engendrée par le phénomène de multitrajet ou par la présence d'obstacles. Le terme consacré est celui d'*évanouissement* ou *fading*.
- distorsion de *fréquence*. Cet effet résulte de l'effet DOPPLER dû au déplacement du mobile.
- distorsion de *phase*. Il s'agit d'une conséquence du multitrajet et de l'effet DOPPLER qui produit une série de versions décalées dans le temps du signal émis.

Dans le cas d'une communication numérique, ces effets se traduisent par un accroissement de l'interférence entre symboles et une diminution du débit utile pour une bande de fréquences fixe.

En principe, il suffit de connaître les trajets pour déterminer la correction à apporter au signal reçu. Cette approche déterministe ne convient cependant pas puisque l'environnement fluctue au cours du temps. En conséquence, on intègre dans les formules donnant le niveau de puissance reçu par un mobile en un point donné des variables aléatoires pour intégrer une incertitude sur les prédictions. C'est donc une démarche à la fois physique, expérimentale et probabiliste qu'il conviendra d'adopter pour l'analyse du bilan de liaison.

10.1.1 Sensibilité du mobile et qualité de service

Pour qu'une radiocommunication s'effectue avec un niveau de qualité suffisant, il faut impérativement satisfaire à deux conditions² :

1. Le niveau de puissance reçu par le mobile doit être supérieur à la *sensibilité du mobile*, c'est-à-dire au niveau de puissance minimal que le mobile est susceptible de détecter pour un bruit d'entrée donné.
2. Le canal ne présente pas une distorsion et un bruit trop élevés.

Un émetteur est caractérisé par sa puissance, un récepteur par sa sensibilité. Pour assurer une réception correcte, le rapport signal à bruit $\frac{C}{N}$, mesuré à un certain point de l'étage de réception –généralement à l'entrée du récepteur, après amplification–, doit être supérieur à un seuil donné. Ce rapport s'exprime fréquemment comme un rapport d'énergie $\frac{E_b}{N_0}$ où E_b est l'énergie par bit transmis et N_0 désigne la densité spectrale de bruit. La valeur de ce seuil de $\frac{E_b}{N_0}$ est généralement fixée par des normes. Par exemple, dans le cas du GSM, le seuil $\frac{E_b}{N_0}$ vaut 8 [dB] en présence d'évanouissement.

Pour relier le rapport $\frac{E_b}{N_0}$ à la sensibilité du mobile, nous effectuons le calcul suivant.

Pour une modulation de largeur de bande W (fréquence de NYQUIST), la puissance de bruit vaut N_0W et la puissance du signal E_bW . Dès lors,

$$\frac{C}{N} = \frac{E_bW}{N_0W} = \frac{E_b}{N_0} \quad (10.2)$$

Il en résulte que, dans une échelle logarithmique,

$$C = \left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{\text{seuil}} + N \quad (10.3)$$

Comme en GSM, la largeur de modulation est de 271 [kHz], le bruit thermique est égal à $1,1 \times 10^{-12}$ [mW], soit -120 [dBm] à une température de 290 [K].

Ce rapport est calculé au droit de la sortie de l'étage d'entrée (typiquement après démodulation). Comme l'amplificateur d'entrée amplifie le bruit d'un facteur typique de 10 [dB], le bruit de fond est borné par -110 [dBm]. Il en découle que la sensibilité du mobile vaut -102 [dBm]. Le tableau 10.1 reprend les quelques valeurs de sensibilité pour différents types de récepteurs.

²En pratique, les opérateurs ajoutent encore une marge de qualité.

Type de récepteur	Sensibilité en $[dBm]$
Station de base	-104
Portable 8 $[W]$	-104
Portable 2 $[W]$ (GSM 900)	-102
GSM bi-bande	-102

TAB. 10.1 – Valeurs typiques de sensibilité (d'après [20]).

10.2 Modèle général de propagation

10.2.1 Introduction

Une communication entre une antenne d'émission et un mobile n'est pas symétrique. En effet, l'antenne d'émission est généralement placée à une hauteur de plusieurs dizaines de mètres, avec un horizon dégagé, alors que le mobile se déplace dans un environnement contenant divers obstacles, à une hauteur de 1 à 3 $[m]$. Une situation typique de liaison est illustrée à la figure 10.2.

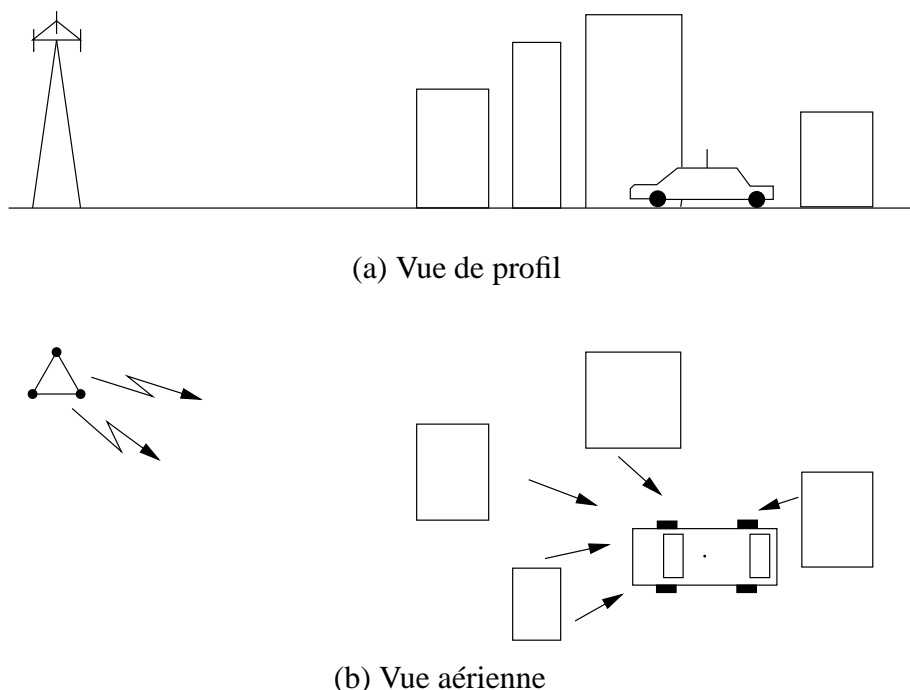
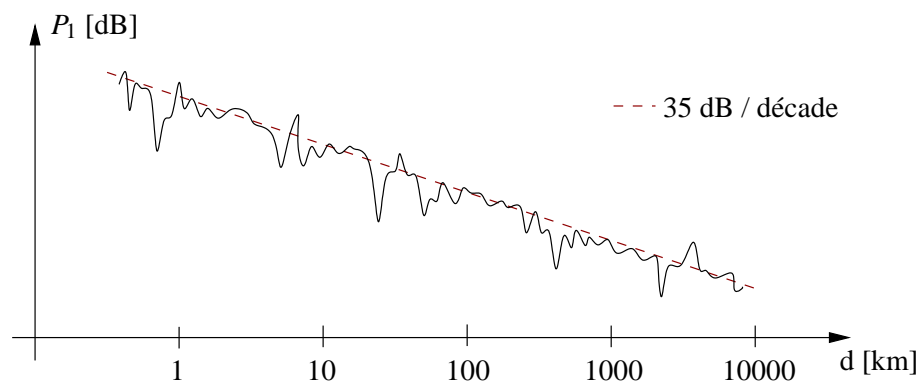


FIG. 10.2 – Vue latérale et vue aérienne d'une liaison entre une antenne d'émission et un mobile.

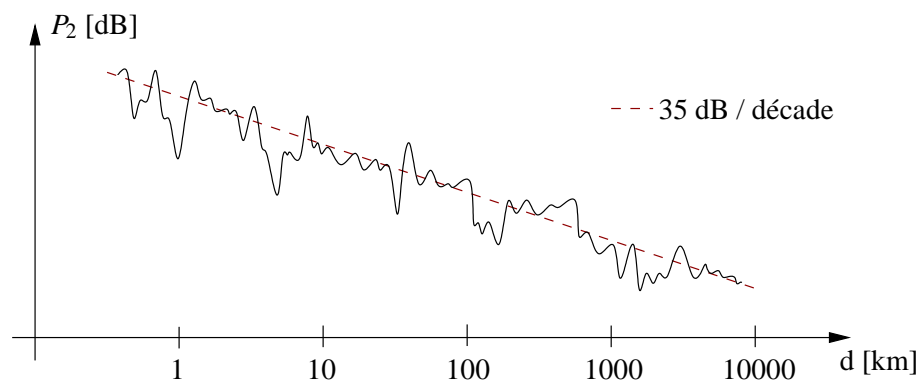
On remarquera l'absence d'un trajet direct entre l'antenne de la station de base et le mobile, ainsi que la présence de signaux réfléchis et diffractés³ venant de toutes les directions. Cette configuration est courante en radiocommunications mobiles terrestres. Un modèle devrait être en mesure de considérer ce type de configuration.

Examinons tout d'abord l'évolution de la puissance reçue en fonction de la distance par rapport à l'émetteur fixe. La figure 10.3 montre l'évolution de la puissance en fonction de la distance, pour une même configuration, prise à deux moments différents. En raison de toute une série de facteurs, les deux courbes diffèrent mais elles marquent une décroissance de la puissance avec l'augmentation de la distance.

³À l'intérieur, il faut encore ajouter les rayons diffractés.



(a) Première mesure



(b) Deuxième mesure

FIG. 10.3 – Évolutions de la puissance en fonction de la distance pour une même configuration apparente.

D'autre part, en pratique, il suffit de parcourir un autre rayon du cercle centré sur l'antenne d'émission pour observer une autre courbe d'affaiblissement, la configuration de l'environnement étant différente.

10.2.2 Modèle

Dans les cas les plus courants, le récepteur et l'émetteur ne sont pas en visibilité directe. On approxime fréquemment l'affaiblissement du canal par un modèle à 3 étages comprenant :

1. une atténuation médiane due à la *distance*,
2. un terme aléatoire prenant en compte les effets de *masque*, dus à la présence d'obstacles, et
3. un autre terme aléatoire décrivant les *évanouissements*.

10.2.3 Affaiblissement de parcours

Tout comme dans le cas d'une liaison en espace libre, si la distance d entre l'émetteur et le récepteur augmente la surface apparente de l'antenne de réception diminue, ce qui se traduit par un accroissement de l'atténuation. En ligne de vue et en l'absence de réflexion, l'affaiblissement, appelé *affaiblissement de parcours* ou *path loss*, est proportionnel au carré de la distance d^2 . Comme cette hypothèse n'est que rarement vérifiée en pratique, l'affaiblissement est proportionnel à une puissance supérieure de d . On opte, par exemple, pour une valeur médiane de l'affaiblissement valant $d^{3,5}$.

L'affaiblissement fournit une évolution de la puissance qui, localement, peut s'écarter des valeurs moyennes observées. En effet, prenons le cas d'une communication GSM à 900 [MHz], entre une antenne d'émission et un mobile distant de 1 [km]. Suivant la loi d'affaiblissement en $d^{3,5}$, s'écarter de 1 [m] contribue à une augmentation de l'affaiblissement de $35 \times (\log_{10} 1001 - \log_{10} 1000)$, soit 0,015 [dB]. Or, la longueur d'onde correspondant à 900 [MHz] est 0,33 [m]. Autrement dit, parcourir une distance de 1 [m] équivaut à 3 longueurs d'onde. À supposer qu'une paroi réfléchisse parfaitement le signal émis, le mobile reçoit le signal direct et le signal réfléchi avec des phases respectives qui peuvent aller de la concordance de phase à l'opposition de phase, soit un affaiblissement supplémentaire allant de -6 [dB] à $+\infty$ [dB]. Ces différents cas de figure peuvent donc se produire plusieurs fois sur une distance de 1 [m].

En définitive, c'est l'allure de l'affaiblissement que l'on traite avec une loi qui serait fonction de la distance ; à ce titre, la valeur fournie par les modèles empiriques est la valeur médiane des valeurs observées. Il faut ajouter à cela des effets statistiques de masquage et de phase.

10.2.4 Masquage

Base physique

Le masquage provient de la présence d'obstacles. En première approximation, on peut considérer qu'un obstacle absorbe un certain pourcentage de la puissance. Ainsi, la puissance transmise ou diffractée ne représente qu'un certain pourcentage de la puissance incidente. De même, la présence d'une vitre se traduit par une certaine diminution de puissance.

Pour modéliser les effets de masquage (*shadowing* en anglais), aussi appelé *évanouissement lent*, nous partons de l'hypothèse suivante. Supposons que toutes les contributions de masquage à l'affaiblissement A , en terme de puissance, soient dues à des facteurs multiplicatifs A_1, A_2, \dots, A_N , tous inférieurs à 1, tels que

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N \quad (10.4)$$

représente l'affaiblissement de masquage⁴.

Dès lors qu'il y a masquage, la puissance reçue P_R vaut

$$P_R = (P_E \times A_{PL}) \times A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N \quad (10.5)$$

où A_{PL} est l'affaiblissement de parcours.

En décibels, l'atténuation totale vaut

$$L_{\text{totale}} = L_{PL} + L = L_{PL} + L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad (10.6)$$

Plus spécifiquement, l'atténuation de masquage L est la somme des N contributions

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad (10.7)$$

Si toutes les contributions sont des variables aléatoires de mêmes espérance et variance, L est une variable aléatoire normale par application du théorème de la limite centrale :

$$L[dB] = L_{50\%}[dB] + \sigma_s[dB] \times N(0, 1) = N(L_{50\%}, \sigma_s^2)[dB] \quad (10.8)$$

tel que $L_{50\%}$ est la valeur médiane de l'atténuation et $\sigma_s[dB]$ sa variance.

En unités naturelles et en écrivant $N(0, 1) = X$, l'affaiblissement vaut

$$L = 10^{L[dB]/10} = 10^{(L_{50\%}[dB] + \sigma_s[dB] \times X)/10} \quad (10.9)$$

$$= 10^{L_{50\%}[dB]/10} 10^{\sigma_s[dB] \times X/10} = L_o V \quad (10.10)$$

où $L_o = 10^{L_{50\%}[dB]/10}$ et

$$V = 10^{\sigma_s[dB] \times X/10} \quad (10.11)$$

est une loi *log-normale*.

Densité de probabilité d'une loi log-normale. Pour calculer la densité de probabilité de la log-normale, on part de l'expression de la gaussienne. Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance unitaire. Sa densité de probabilité vaut, pour $x \in [-\infty, +\infty]$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (10.12)$$

On définit ensuite la variable aléatoire log-normale V de la manière suivante

$$V = 10^{\frac{\sigma_s X}{10}} = e^{\beta \sigma_s X} \quad (10.13)$$

où

$$\beta = \frac{\ln(10)}{10} = 0,23 \quad (10.14)$$

La fonction de répartition de V vaut [22, page 152]

$$F_V(v) = p(V \leq v) = p(e^{\beta \sigma_s X} \leq v) = p(X \leq \frac{\ln v}{\beta \sigma_s}) \quad (10.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln v / \beta \sigma_s} f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln v / \beta \sigma_s} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (10.16)$$

⁴Cette définition, courante dans la littérature scientifique, peut prêter à confusion. En effet, en toute rigueur A représente l'inverse de l'affaiblissement. Par la suite, nous adopterons néanmoins la définition 10.4.

Par dérivation, il en résulte une densité de probabilité

$$f_V(v) = \frac{f_X(x)}{|\partial v / \partial x|} \Big|_{x=\frac{\ln v}{\beta \sigma_s}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\beta \sigma_s e^{\beta \sigma_s x}} \Big|_{x=\frac{\ln v}{\beta \sigma_s}} \quad (10.17)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\beta \sigma_s v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln v)^2}{2\beta^2 \sigma_s^2}} & \text{si } v \geq 0 \\ 0 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (10.18)$$

Cette densité de probabilité est représentée à la figure 10.4.

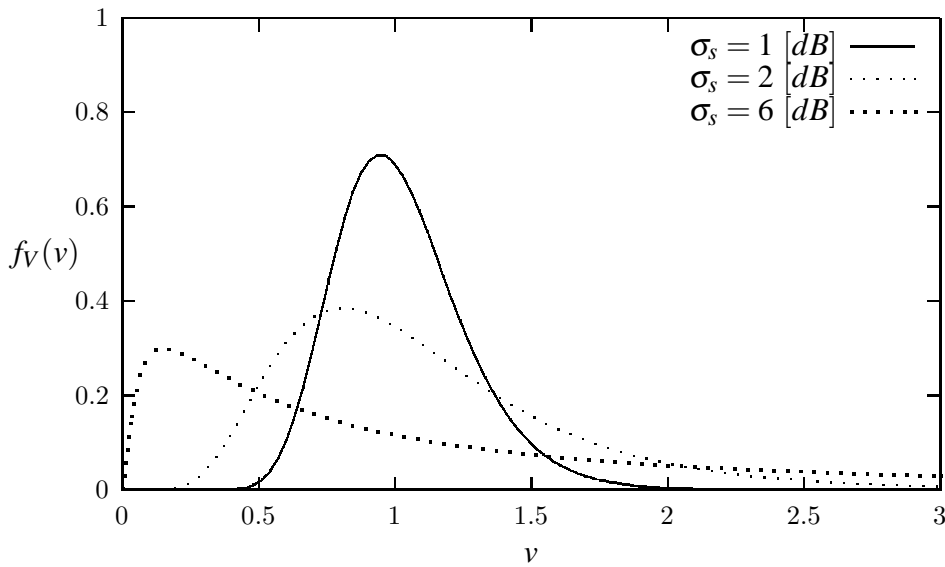


FIG. 10.4 – Densité de probabilité d'une loi log-normale.

La valeur médiane de V , $v_{50\%}$, est tirée de la valeur médiane de X par $v_{50\%} = e^{x_{50\%}} = 10^0 = 1$ quelle que soit la valeur de σ_s .

En pratique, tous les termes ne contribuent pas de la même manière à l'affaiblissement. D'autre part, on peut montrer que les termes de diffraction n'obéissent pas à une simple loi additive, en raison d'une dépendance entre certains termes. Néanmoins, diverses mesures montrent que la loi log-normale est généralement suffisante pour modéliser le masquage.

Impact sur la zone de couverture en bordure d'une cellule

En présence d'un effet de masquage, l'affaiblissement L est une variable aléatoire normale $N(L_{50\%}, \sigma_s^2)$ (cf. équation 10.8) :

$$L[dB] = N(L_{50\%}, \sigma_s^2) [dB] \quad (10.19)$$

On peut en déduire une variable aléatoire normale centrée L_s au moyen de l'expression

$$L[dB] = L_{50\%} [dB] + L_s [dB] \quad (10.20)$$

où

- $L_{50\%}$ est la valeur *médiane*⁵ de l'affaiblissement de parcours telle que fournie par les modèles empiriques résultant de mesures. En effet, ces mesures fournissent une valeur médiane qui, outre l'affaiblissement de parcours, englobe un effet moyen de masquage. C'est la raison pour laquelle on classe les modèles empiriques en fonction de la densité de l'environnement urbain.
- L_s , la variable aléatoire de masquage ; c'est-à-dire une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type σ_s .

La densité de probabilité de L_s est donc

$$f(l_s) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-l_s^2}{2\sigma_s^2}} \quad (10.21)$$

Pour des raisons d'efficacité, il est nécessaire de garantir un niveau de puissance supérieur à la valeur médiane ; l'ingénieur de réseau n'a guère le choix que d'ajouter une marge supplémentaire de puissance à l'émission afin d'augmenter la couverture. À l'ajout de cette marge de m_s [dB] correspond une probabilité de couverture supérieure à celle de la puissance médiane pour une même sensibilité de récepteur. Cette probabilité se calcule par

$$p(l_s < m_s) = \int_{-\infty}^{m_s} \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-l_s^2}{2\sigma_s^2}} dl_s \quad (10.22)$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^{m_s} \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-l_s^2}{2\sigma_s^2}} dl_s \quad (10.23)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{m_s}{\sqrt{2}\sigma_s}\right) \quad (10.24)$$

$\operatorname{erf}(x)$ est la fonction d'erreur

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (10.25)$$

L'effet de masque représente une variation sur les conditions de propagation, tantôt favorable (par exemple visibilité directe), tantôt défavorable (par exemple lors de la présence d'un obstacle important entre l'émetteur et le récepteur). En environnement urbain, l'écart type de la loi a une valeur typique de 6 [dB] (d'après [20]).

La figure 10.5 montre la probabilité de couverture (en %) en fonction de la marge additionnelle de puissance.

10.2.5 Évanouissement

Pour obtenir la statistique qui décrit le phénomène d'évanouissement, il faut distinguer deux cas, suivant qu'il y ait ou non visibilité directe –ou du moins, un trajet nettement moins atténué que les autres– entre l'antenne de la station de base et l'antenne du mobile.

Évanouissement en l'absence d'un trajet direct

Considérons une série de trajets dus à la diffraction et à la réflexion (cf. figure 10.6). Dans un premier temps, nous considérons le cas d'un émetteur et d'un récepteur qui ne sont pas en ligne de vue.

⁵La valeur *médiane* d'une variable aléatoire normale est théoriquement égale à sa *moyenne*. Pour les mesures, le recours à la médiane est préférable si l'on ne dispose pas d'un large ensemble de réalisations car elle élimine l'impact des valeurs aberrantes.

Probabilité de couverture (en %)

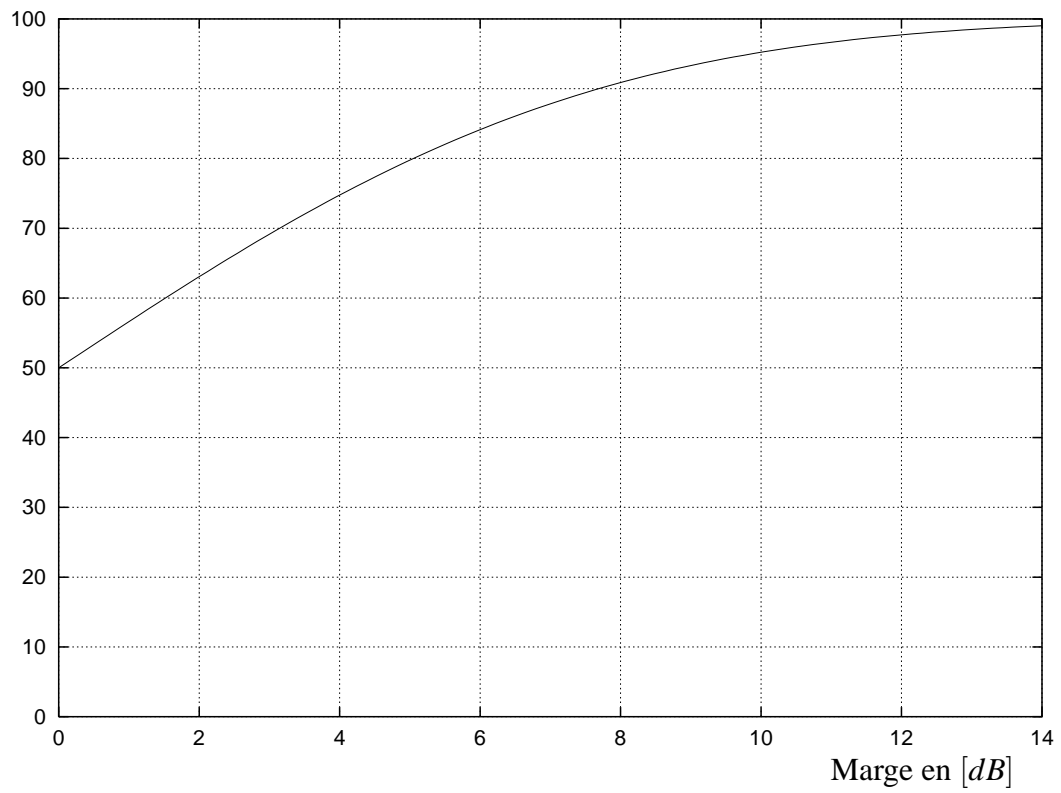


FIG. 10.5 – Pourcentage de couverture tel que défini par un seuil de puissance.

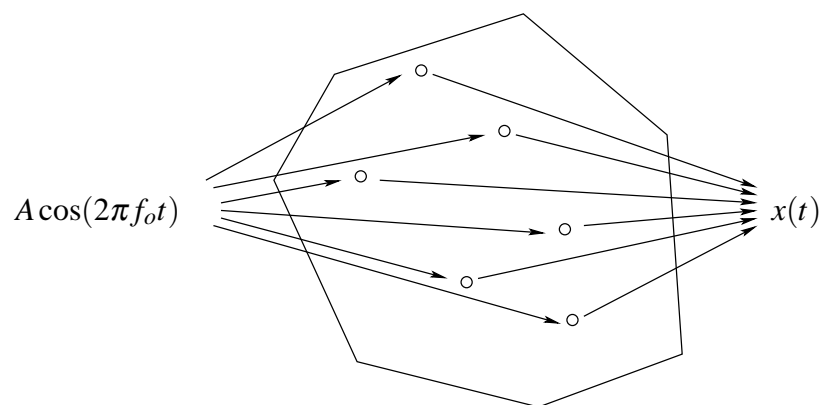


FIG. 10.6 – Effet de multitrajet par diffraction et réflexion.

L'émetteur envoie un signal cosinusoidal $A \cos(2\pi f_o t)$ avec une amplitude et une fréquence f_o constantes. Le signal reçu au droit du récepteur $X(t)$ est composé d'une série d'ondes déphasées et atténuées

$$X(t) = \sum_i C_i \cos(2\pi f_o t + \theta_i) \quad (10.26)$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme de termes en phase et en quadrature

$$X(t) = \sum_i [A_i \cos(2\pi f_o t) + B_i \cos(2\pi f_o t + \frac{\pi}{2})] \quad (10.27)$$

$$= \sum_i [A_i \cos(2\pi f_o t) + B_i \sin(2\pi f_o t)] \quad (10.28)$$

$$= X_I(t) \cos(2\pi f_o t) - X_Q(t) \sin(2\pi f_o t) \quad (10.29)$$

où l'on a défini

$$X_I(t) = \sum_i A_i = \sum_i C_i \cos \theta_i \quad \text{et} \quad X_Q(t) = \sum_i B_i = \sum_i C_i \sin \theta_i \quad (10.30)$$

Le canal n'étant pas invariant dans le temps (par exemple en raison de déplacements), les composantes en phase et en quadrature sont des fonctions temporelles. D'autre part, $X(t)$ est la réalisation d'un processus stochastique qui est la somme de termes indépendants. Dès lors, en vertu du théorème de la limite centrale, $X_I(t)$ et $X_Q(t)$ représentent des variables aléatoires gaussiennes.

Si l'on veut déterminer l'intensité de champ électrique, il faut analyser l'évolution de l'amplitude du signal. Cette amplitude est définie par⁶

$$R(t) = \sqrt{X_I^2(t) + X_Q^2(t)}, \quad R(t) \geq 0 \quad (10.31)$$

quant à la phase, elle vaut

$$\Phi(t) = \tan^{-1} \frac{X_Q(t)}{X_I(t)}, \quad \Phi(t) \in [0, 2\pi[\quad (10.32)$$

et donc

$$X(t) = R(t) \cos(2\pi f_o t + \Phi(t)) \quad (10.33)$$

Pour exprimer les densités de probabilité de ces variables aléatoires à partir de $X_I(t)$ et $X_Q(t)$, supposons tout d'abord que les composantes en phase et en quadrature soient des variables gaussiennes centrées, de même variance σ_X^2 et non corrélées. Les variables sont centrées car elles résultent de la somme de variables aléatoires de type $C_i \cos \theta_i$. Or, en supposant que les variables C_i et $\cos \theta_i$ soient indépendantes, $E \{C_i \cos \theta_i\} = E \{C_i\} E \{\cos \theta_i\} = 0$ si l'on considère un argument uniformément distribué sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Physiquement, une moyenne correspond à des contributions d'amplitude négative, plus précisément à des termes en décalage de phase de 90° à 270° .

Densité de probabilité. S'agissant de gaussiennes, la non corrélation entraîne l'indépendance [7, page 162]. La densité de probabilité conjointe est dès lors égale à

$$f_{X_I X_Q}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\sigma_X^2}} \quad (10.34)$$

Le changement de variables

$$x_I = r \cos \phi \quad (10.35)$$

$$x_Q = r \sin \phi \quad (10.36)$$

⁶Les résultats suivants résultent de la décomposition en composantes de RICE et de la représentation par un passe-bas équivalent d'un signal passe-bande.

permet de trouver la densité de probabilité conjointe $f_{R,\Phi}(r, \phi)$. En effet, on sait qu'en toute généralité, un changement de variables fait intervenir le Jacobien⁷

$$f_{R,\Phi}(r, \phi) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X_I}{\partial R} & \frac{\partial X_Q}{\partial R} \\ \frac{\partial X_I}{\partial \Phi} & \frac{\partial X_Q}{\partial \Phi} \end{array} \right| f_{X_I X_Q}(r \cos \phi, r \sin \phi) \quad (10.37)$$

Dès lors,

$$f_{R,\Phi}(r, \phi) = \left| \begin{array}{cc} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{array} \right| f_{X_I X_Q}(r \cos \phi, r \sin \phi) \quad (10.38)$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi}{2\sigma_X^2}} \quad (10.39)$$

$$= \begin{cases} \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_X^2}}, & r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi[\\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (10.40)$$

Densité de probabilité marginale de l'enveloppe. La densité de probabilité marginale des amplitudes s'obtient en intégrant la densité conjointe sur Φ . Un calcul simple conduit à

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_X^2}}, & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (10.41)$$

C'est la densité de probabilité de RAYLEIGH. Elle est illustrée, sous forme normalisée, à la figure 10.7.

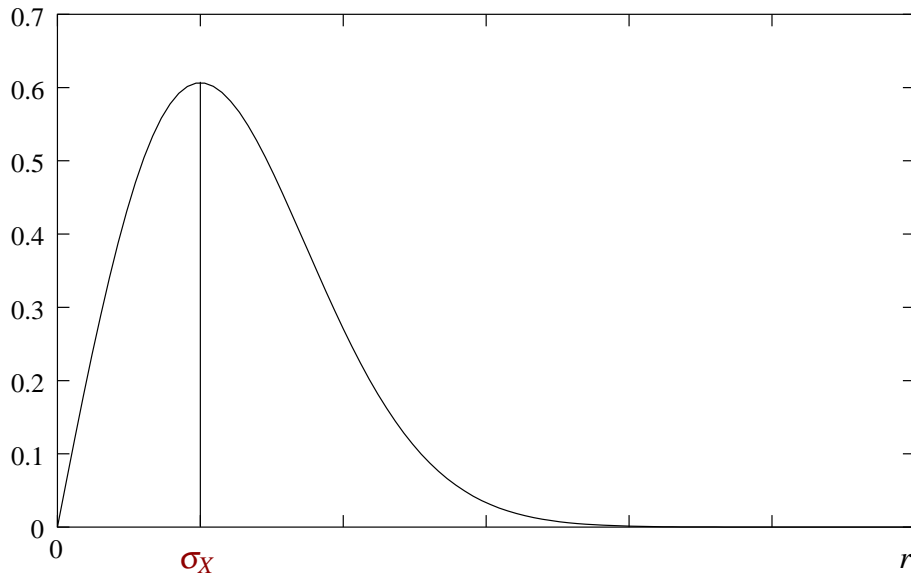


FIG. 10.7 – Densité de probabilité de RAYLEIGH.

Les moments de cette loi valent [25]

$$E\{r\}^n = \begin{cases} 1 \times 3 \times \dots \times n \sigma_X^n \sqrt{\pi/2} & \text{pour } n = 2k + 1 \\ 2^k k! \sigma_X^{2k} & \text{pour } n = 2k \end{cases} \quad (10.42)$$

⁷Voir par exemple PAPOULIS [25, page 143] pour une démonstration.

En particulier,

$$E\{r\} = \sqrt{\pi/2} \sigma_X \simeq 1,253 \times \sigma_X \quad (10.43)$$

$$\sigma_R^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_X^2 \simeq 0,429 \times \sigma_X^2 \quad (10.44)$$

Quant à l'amplitude quadratique moyenne mesurée, elle vaut

$$R_{\text{rms}} = \left[\int_0^{+\infty} r^2 \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_X^2}} dr \right]^{1/2} = \sqrt{2} \sigma_X \simeq 1,41 \times \sigma_X \quad (10.45)$$

On parle généralement d'évanouissement lorsque l'amplitude du signal passe en dessous de R_{rms} [22].

Densité de probabilité marginale de la phase. Pour obtenir la densité marginale $f_\Phi(\phi)$, on intègre sur r de 0 à $+\infty$:

$$f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \phi \in [0, 2\pi[\quad (10.46)$$

ce qui signifie que Φ est une variable aléatoire uniforme et indépendante de R , d'où

$$f_{R,\Phi}(r, \phi) = f_R(r) f_\Phi(\phi) \quad (10.47)$$

Données expérimentales. La figure 10.8 montre l'histogramme de niveaux de puissance relevés expérimentalement en l'absence d'un trajet direct. Une approximation de la loi de RAYLEIGH est superposée à cet histogramme.

Évanouissement en présence d'un trajet direct

En présence d'un trajet direct, le signal reçu contient le signal transmis en ligne droite, en plus du bruit et des copies décalées et atténuées du signal utile

$$Z(t) = A \cos(2\pi f_o t + \theta) + X(t) \quad (10.48)$$

Ce cas est évidemment plus favorable que le cas précédent puisque le récepteur reçoit également le signal en ligne de vue. L'étude menée ci-après vise à mesurer l'importance de l'ajout du signal direct. Il ne faudrait pas pour autant en déduire des règles de dimensionnement car on doit tenir compte des conditions les plus défavorables pour l'établissement du bilan de puissance, c'est-à-dire en l'absence d'un trajet direct.

Pour un signal $Z(t)$ à bande étroite, il est possible de recourir à la décomposition de RICE

$$Z(t) = Z_I(t) \cos(2\pi f_o t) - Z_Q(t) \sin(2\pi f_o t) \quad (10.49)$$

où

$$Z_I(t) = A \cos \theta + X_I(t) \quad (10.50)$$

$$Z_Q(t) = A \sin \theta + X_Q(t) \quad (10.51)$$

En faisant apparaître l'amplitude et la phase,

$$Z(t) = R(t) \cos(2\pi f_o t + \Phi(t)) \quad (10.52)$$

où

$$R(t) = \sqrt{Z_I^2(t) + Z_Q^2(t)}, \quad R(t) \geq 0 \quad (10.53)$$

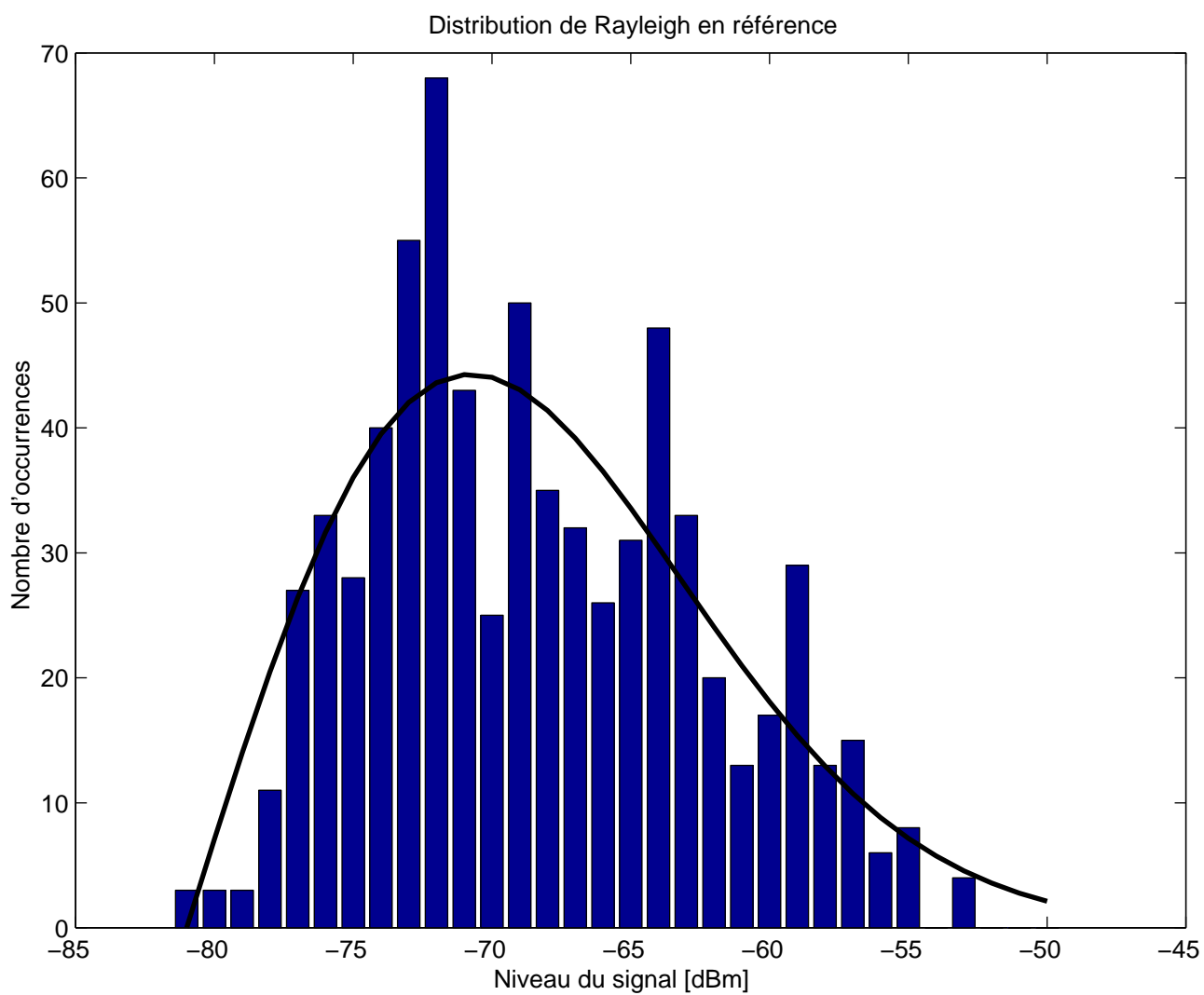


FIG. 10.8 – Histogramme de niveaux de puissance relevés expérimentalement (d'après LAPIERRE [21]).

et

$$\Phi(t) = \tan^{-1} \frac{Z_Q(t)}{Z_I(t)}, \quad \Phi(t) \in [0, 2\pi[\quad (10.54)$$

Dès lors,

$$Z_I(t) = R(t) \cos \Phi(t) \quad (10.55)$$

$$Z_Q(t) = R(t) \sin \Phi(t) \quad (10.56)$$

Pour une valeur donnée de θ , les variables aléatoires gaussiennes $X_I(t)$ et $X_Q(t)$ étant indépendantes, elles conservent ce caractère. Il en résulte que

$$Z_I(t) = N(A \cos \theta, \sigma_X^2) \quad (10.57)$$

$$Z_Q(t) = N(A \sin \theta, \sigma_X^2) \quad (10.58)$$

La probabilité conjointe, conditionnellement à θ , est donc

$$f_{Z_I Z_Q}(\alpha, \beta | \theta = \theta_o) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{(\alpha - A \cos \theta_o)^2 + (\beta - A \sin \theta_o)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (10.59)$$

Densité de probabilité. Le même changement de variable fournit le même Jacobien, d'où

$$f_{R,\Phi}(r, \phi | \theta_o) = \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} f_{Z_I Z_Q}(r \cos \phi, r \sin \phi | \theta_o) \quad (10.60)$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{(r \cos \phi - A \cos \theta_o)^2 + (r \sin \phi - A \sin \theta_o)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (10.61)$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2 + A^2 - 2rA \cos(\theta_o - \phi)}{2\sigma_X^2}} \quad (10.62)$$

Densité de probabilité marginale de l'enveloppe. L'intégration sur la phase donne

$$f_R(r | \theta_o) = \int_0^{2\pi} f_{R,\Phi}(r, \phi | \theta_o) d\phi \quad (10.63)$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma_X^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{rA \cos(\theta_o - \phi)}{\sigma_X^2}} d\phi \quad (10.64)$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma_X^2}} 2\pi I_0\left(\frac{Ar}{\sigma_X^2}\right) \quad (10.65)$$

où $I_0(x)$ est la fonction de BESSEL modifiée d'ordre 0 telle que

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \quad (10.66)$$

$$\simeq \begin{cases} 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}, & x < 2,5 \\ \frac{e^{1,1x}}{1,9x}, & 2,5 < x < 10 \end{cases} \quad (10.67)$$

La fonction $I_0(x)$ est représentée à la figure 10.9.

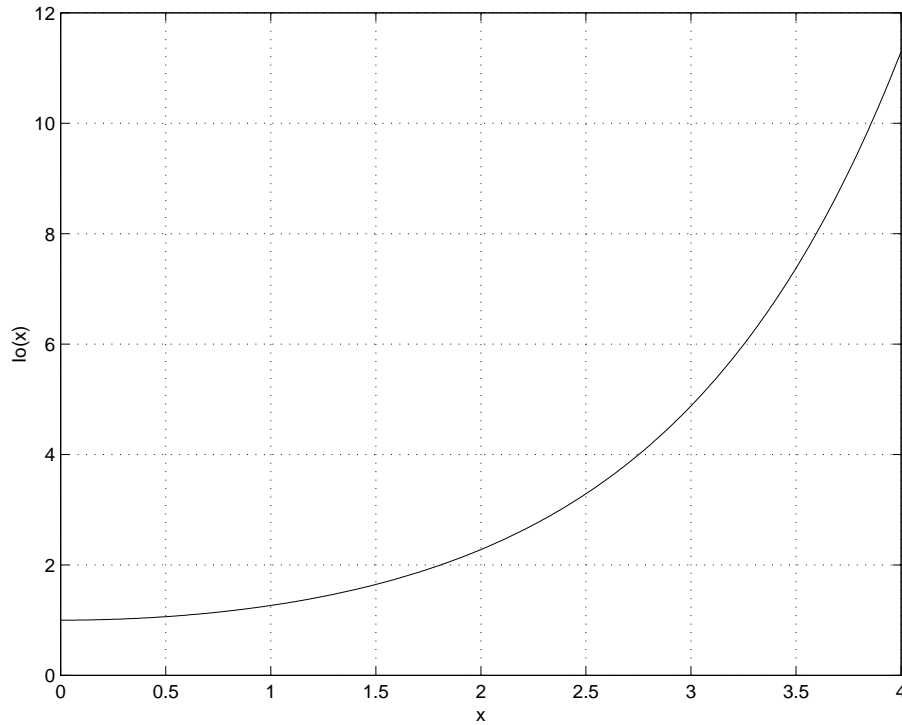


FIG. 10.9 – Fonction de BESSEL modifiée de première espèce d'ordre 0.

Remarquons que cette densité de probabilité est indépendante de la phase initiale θ_o . On peut donc supprimer la condition en θ_o pour aboutir à

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma_X^2}} I_0\left(\frac{Ar}{\sigma_X^2}\right), & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (10.68)$$

Il s'agit de la densité de probabilité de RICE ; elle est illustrée (sous forme normalisée) à la figure 10.10. Lorsque $A = 0$, il s'agit de la loi de RAYLEIGH.

10.2.6 Autres lois d'affaiblissement

Les lois log-normale, de RAYLEIGH et de RICE tiennent compte des principaux effets d'évanouissement. Il existe néanmoins d'autres modèles, comme les modèles de NAKAGAMI, qui se révèlent plus appropriés dans certaines situations (voir par exemple [31, chapitre 2] pour une discussion des modèles).

10.2.7 Effet DOPPLER

Les multitrajets génèrent un effet d'évanouissement rapide. C'est en fait la somme de phases distribuées aléatoirement qui modifie l'amplitude instantanée du signal résultant. Il est un autre effet générateur de distorsion de phase : le mouvement du mobile. Prenons le cas illustré à la figure 10.11. Un mobile s'écarte d'une source stationnaire suivant un vecteur vitesse (instantané) \vec{V} .

Considérons que l'onde reçue par le mobile est une onde plane et que le mobile se déplace dans une direction orientée d'un angle θ . Le déplacement du mobile par rapport au front d'onde crée une distorsion de la fréquence apparente qui porte le nom d'effet DOPPLER. La distorsion est proportionnelle au déplacement dans l'axe perpendiculaire au front d'onde.

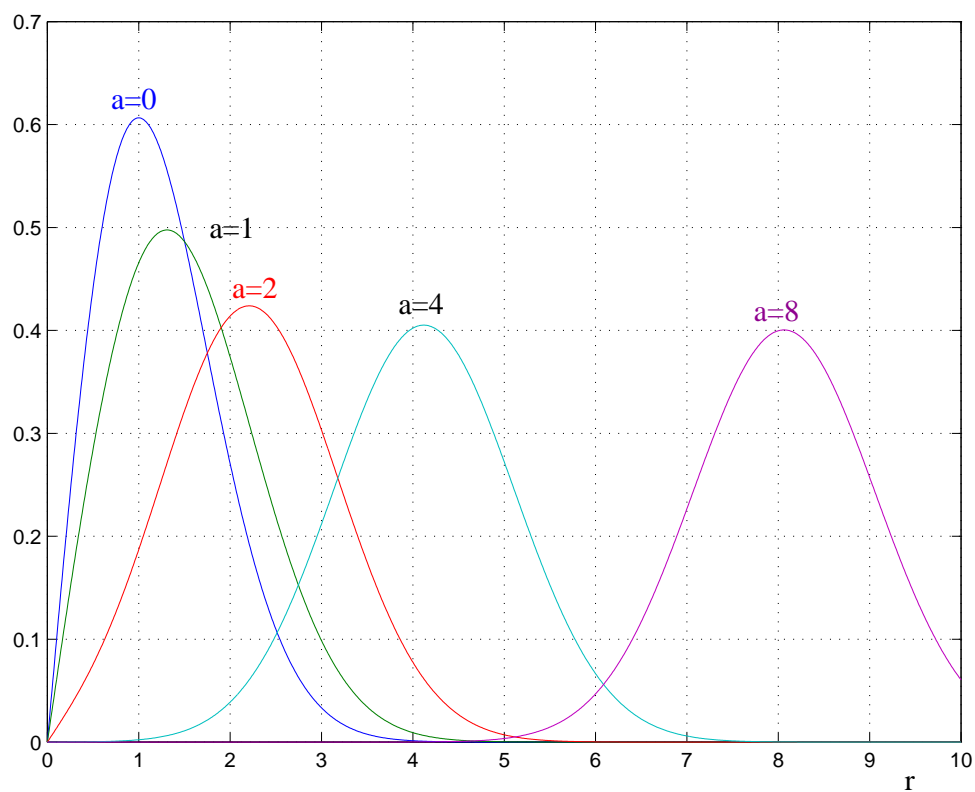


FIG. 10.10 – Densité de probabilité de RICE (pour différentes valeurs de $a = \frac{A}{\sigma_x}$).

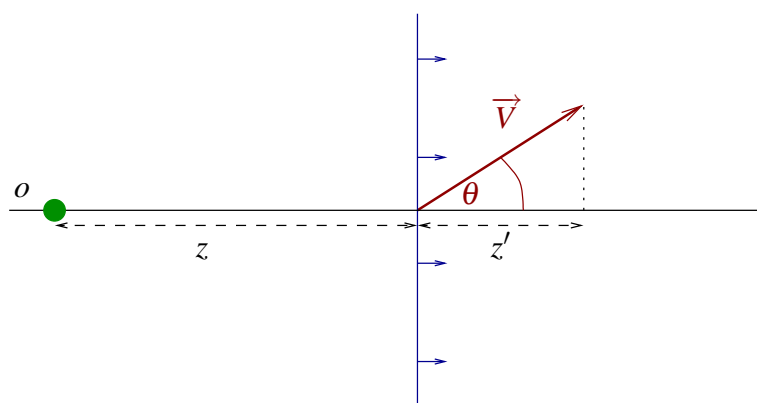


FIG. 10.11 – Effet DOPPLER.

Prenons le cas d'une source qui émet un champ électrique sinusoïdal de fréquence f_c . En l'absence de mouvement, le champ reçu au droit du mobile vaut, suivant la théorie des ondes [26],

$$E(t) = E_0 e^{j(\omega_c t - \beta z)} \quad (10.69)$$

avec $\omega_c = 2\pi f_c$ et le nombre d'onde $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_c}$. Si le mobile est animé d'un mouvement à vitesse \vec{V} dans la direction θ . Le champ reçu devient

$$E(t) = E_0 e^{j(\omega_c t - \beta z - \beta z')} \quad (10.70)$$

$$= E_0 e^{j(\omega_c t - \beta z - \beta V t \cos \theta)} \quad (10.71)$$

$$= E_0 e^{j2\pi(f_c - \frac{V}{\lambda_c} \cos \theta)t - j\beta z} \quad (10.72)$$

Le déplacement du mobile entraîne donc une distorsion de fréquence d'amplitude

$$f_D = \frac{V}{\lambda_c} \cos \theta = f_m \cos \theta \quad (10.73)$$

appelée fréquence DOPPLER. Comme V et θ fluctuent au cours du temps, on assiste à une distorsion de fréquence variable –et donc de phase– pour l'analyse de laquelle il faudra également recourir à des outils statistiques. La modification de la fréquence porteuse dans une place de fréquences porte le nom d'étalement DOPPLER. La figure 10.12 montre les spectres à l'émission et à la réception résultant de l'effet DOPPLER.

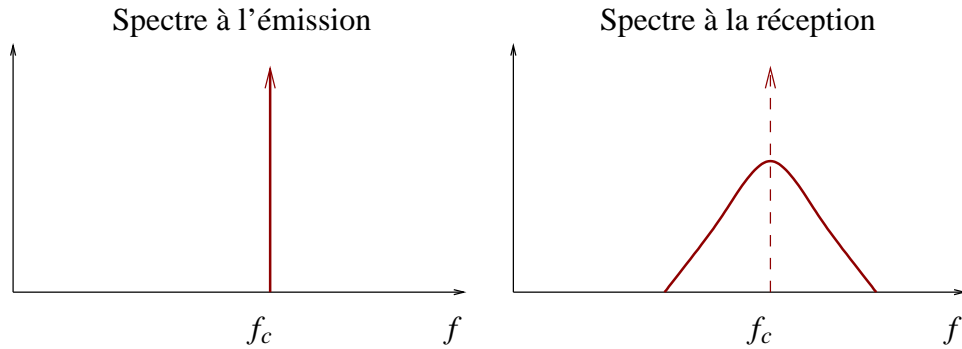


FIG. 10.12 – Étalement DOPPLER.

Exemple. Prenons le cas d'un mobile GSM ($900 [MHz]$) se déplaçant à $120 km/h$. La fréquence DOPPLER maximale intervient lorsque le mobile se déplace dans l'axe de propagation de l'onde, c'est-à-dire pour $\cos \theta = 1$. Dans ce cas, $f_D = f_m = V \frac{f_c}{c} = \frac{1,2 \times 10^5}{3600} \times \frac{9 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 100 [Hz]$. La fréquence instantanée est donc comprise dans un intervalle de largeur $200 [Hz]$.

Spectre DOPPLER classique

L'allure de l'étalement DOPPLER a un impact significatif sur les statistiques d'évanouissement. Pour en déterminer l'expression, nous partons d'une hypothèse quant à la distribution des angles d'arrivée dans le plan horizontal des trajets multiples. Le modèle le plus simple consiste à considérer une variable aléatoire d'angle d'arrivée Θ dont la densité de probabilité $f_\Theta(\theta)$ est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

La puissance moyenne récoltée dans un secteur angulaire $d\theta$ pour une antenne de gain $G(\theta)$ vaut

$$P_R(\theta) = G(\theta) f_\Theta(\theta) d\theta \quad (10.74)$$

En associant un secteur angulaire à une contribution spécifique de l'étalement DOPPLER, la puissance correspondante en termes de fréquence vaut

$$P_R(f) = \gamma_D(f) df \quad (10.75)$$

On remarquera aisément que deux secteurs angulaires d'orientation opposée contribuent à une même fréquence. Dès lors,

$$\gamma_D(f) df = G(\theta) f_\Theta(\theta) d\theta + G(-\theta) f_\Theta(-\theta) d\theta \quad (10.76)$$

Ce qui mène à

$$|\gamma_D(f)| = \frac{G(\theta) f_\Theta(\theta) + G(-\theta) f_\Theta(-\theta)}{\left| \frac{df}{d\theta} \right|} \quad (10.77)$$

Par la relation 10.73,

$$\left| \frac{df}{d\theta} \right| = f_m |\sin \theta| \quad (10.78)$$

$$= f_m \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (10.79)$$

$$= f_m \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m} \right)^2} \quad (10.80)$$

Finalement, en prenant une antenne de gain symétrique, le spectre vaut

$$|\gamma_D(f)| = \frac{\frac{G(\theta)}{2\pi} + \frac{G(-\theta)}{2\pi}}{f_m \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m} \right)^2}} = \frac{G(\theta)}{\pi f_m \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m} \right)^2}} \quad \text{pour } |f| \leq f_m \quad (10.81)$$

et 0 pour $|f| > f_m$. Cette forme de spectre porte le nom de *spectre DOPPLER classique* ; elle est illustrée à la figure 10.13.

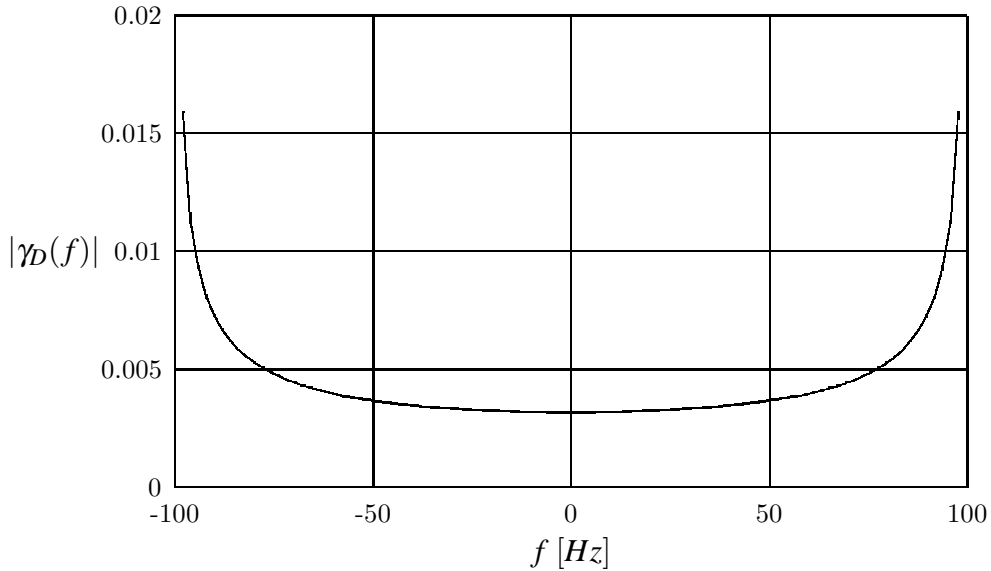


FIG. 10.13 – Spectre DOPPLER classique ($f_c = 900 [MHz]$, $V = 100 [km/h]$ et $G = 1$).

Bien que leur obtention soit mathématiquement complexe, il existe des expressions des densités spectrales de la phase du signal, de la fréquence instantanée, de l'enveloppe et d'autres quantités encore. En particulier, l'analyse de l'enveloppe montre que sa fonction d'autocorrélation se resserre lorsque la vitesse augmente, ce qui signifie que les enveloppes prises à deux temps voisins sont moins corrélées et donc que l'évanouissement marque des sauts plus brusques [1].

10.3 Modèles empiriques

En pratique, les modèles de propagation utilisés ne sont pas des modèles analytiques vu le nombre élevé de paramètres et la diversité des situations dont il faudrait tenir compte. Plus que les valeurs des champs en un point, c'est la couverture géographique qui intéresse les opérateurs de réseau.

Un complément utile aux modèles analytiques est le recours à une base de données topographique afin de maîtriser au mieux la couverture. Cette approche n'exclut en rien le besoin d'effectuer des mesures en raison de la limitation inhérentes aux différents modèles et de l'évolution constante de l'environnement. À défaut de mesures, on peut s'appuyer sur des modèles empiriques qui fournissent des ordres de grandeur fiables pour toute une série de configurations de référence.

10.3.1 Types d'environnement

Il existe différents types de modèles empiriques. Pour la plupart, on distingue plusieurs types d'environnements, parmi lesquels :

- l'environnement *rural* pour lequel l'horizon est principalement dégagé. La propagation est alors majoritairement influencé par le relief plutôt que par les bâtiments ;
- l'environnement *urbain* désignant de petites villes ne comportant pas ou peu de hauts buildings ;
- l'environnement *urbain dense* englobant la majorité des grandes villes pour lesquelles l'affaiblissement est principalement régi par l'agencement des bâtiments.

La distinction entre un urbain et urbain dense est parfois ténue. Néanmoins, la densification de l'environnement s'accompagne d'une augmentation de la pente de l'affaiblissement en fonction de la distance. Des valeurs typiques de pentes sont résumées dans le tableau 10.2. Un exposant de 3,5 implique un affaiblissement de 35 [dB] par décade.

Environnement	exposant
rural	3,2
urbain	3,5
urbain dense	3,8

TAB. 10.2 – Valeurs de l'exposant de l'affaiblissement de parcours en fonction de la distance pour différents environnements.

10.3.2 Types de cellule

On distingue aussi, généralement, quatre types de cellules (d'après [19]) :

1. la *macro-cellule*. Il s'agit d'une cellule de quelques dizaines de kilomètres de rayon qui caractérise les liaisons en milieu suburbain et rural. Les antennes d'émission sont, dans ce cas particulier, placées sur des positions élevées.
2. la *petite cellule* de quelques kilomètres de rayon. Elle est particulièrement adaptée à l'environnement urbain. Les antennes des stations de base sont situées sur des bâtiments au-dessus du niveau des toits. En milieu urbain dense, la portée des petites cellules est plutôt de l'ordre de 800 [m].
3. la *micro-cellule* de quelques centaines de mètres de rayon. Elle est adaptée à l'environnement urbain dense. Les antennes des stations de base sont situées sous le niveau des toits.
4. la *pico-cellule*. D'une taille de quelques dizaines de mètres de rayon, elle convient pour la propagation à l'intérieur des bâtiments dans lesquels sont placées les antennes des stations de base.

10.3.3 Influence de la hauteur des antennes

D'autres paramètres influencent l'affaiblissement de parcours, notamment la hauteur des antennes. Pour le montrer, nous partons de la configuration illustrée à la figure 10.14.

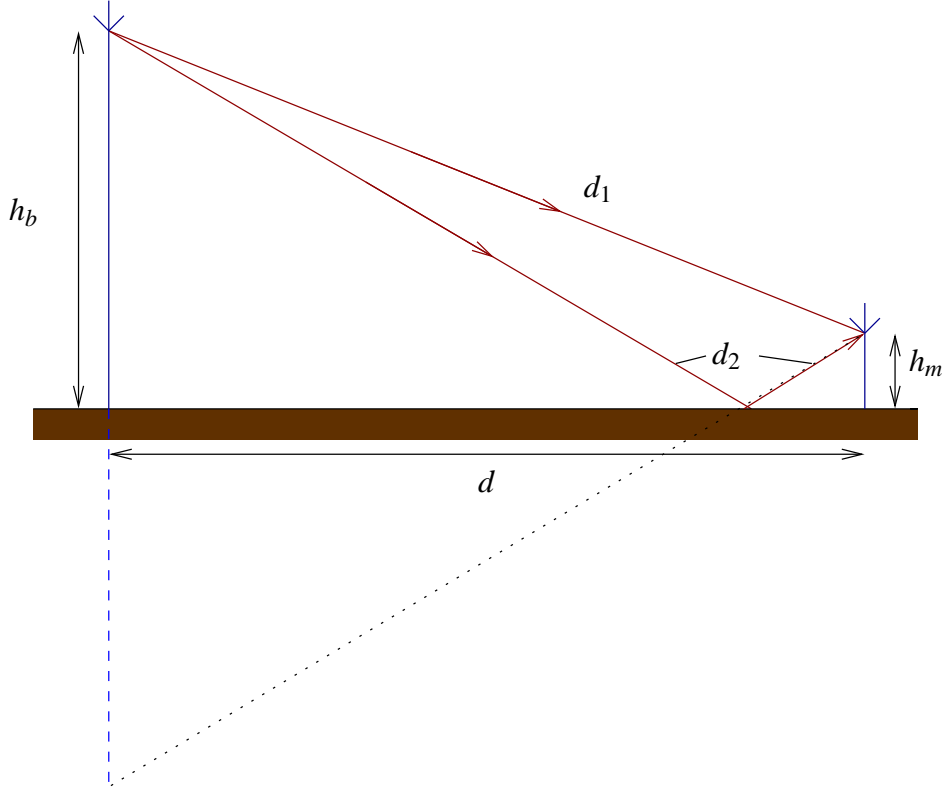


FIG. 10.14 – Calcul de l'influence de la réflexion.

Prenons un trajet direct de type $Ae^{-j\beta d_1}$ (β est le nombre d'onde : $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$).

Que le champ électrique soit à polarisation horizontale ou verticale, on montre que la réflexion sur un conducteur électrique parfait affecte le champ d'un coefficient -1 (cf. par exemple [26]). En conséquence, le champ reçu au droit du récepteur vaut

$$Ae^{-j\beta d_1} - Ae^{-j\beta d_2} = Ae^{-j\beta d_1} \left(1 - e^{-j\beta(d_2-d_1)} \right) \quad (10.82)$$

Autrement dit, l'affaiblissement qui résulterait d'une propagation en espace libre est affecté d'un facteur

$$\Gamma = 1 - e^{-j\beta(d_2-d_1)} \quad (10.83)$$

Nous cherchons à présent à illustrer la dépendance en d . Par simple calcul de l'hypoténuse de triangles rectangles,

$$d_1 = \sqrt{(h_b - h_m)^2 + d^2} \quad (10.84)$$

$$d_2 = \sqrt{(h_b + h_m)^2 + d^2} \quad (10.85)$$

D'où

$$d_2 - d_1 = d \left(\sqrt{\left(\frac{h_b + h_m}{d} \right)^2 + 1} - \sqrt{\left(\frac{h_b - h_m}{d} \right)^2 + 1} \right) \quad (10.86)$$

Soit encore, après utilisation de l'approximation $(1+x)^n \approx 1+nx$,

$$d_2 - d_1 \approx \frac{2h_b h_m}{d} \quad (10.87)$$

Dès lors, en termes de puissance, le facteur vaut

$$\Gamma^2 = \left| 1 - e^{-j\beta(d_2-d_1)} \right|^2 \quad (10.88)$$

$$= \left| e^{-j\beta(d_2-d_1)/2} \right|^2 \left| e^{j\beta(d_2-d_1)/2} - e^{-j\beta(d_2-d_1)/2} \right|^2 \quad (10.89)$$

$$= 4 \sin^2 \left(\beta \frac{h_b h_m}{d} \right) \quad (10.90)$$

$$\simeq 4 \left(\beta \frac{h_b h_m}{d} \right)^2 \simeq 4 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_b h_m}{d} \right)^2 = \left(\frac{4\pi}{\lambda} \frac{h_b h_m}{d} \right)^2 \quad (10.91)$$

La puissance reçue P_R vaut alors

$$P_R \simeq P_E G_E G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \left(\frac{4\pi}{\lambda} \frac{h_b h_m}{d} \right)^2 \quad (10.92)$$

$$\simeq P_E G_E G_R \frac{h_b^2 h_m^2}{d^4} \quad (10.93)$$

Ou encore, en décibels,

$$P_R [dB] = 10 \log_{10}(P_E G_E G_R) + 20 \log_{10} h_b + 20 \log_{10} h_m - 40 \log_{10} d \quad (10.94)$$

Cette formule montre que l'affaiblissement en fonction de la distance est deux fois plus rapide qu'en espace libre et qu'il ne dépend plus de la fréquence, si ce n'est au travers des gains d'antenne. En pratique, il apparaît que le modèle simple que nous avons choisi n'est pas très représentatif des situations réelles. L'analyse montre néanmoins certaines tendances que l'on retrouve dans certains modèles empiriques.

10.3.4 Modèles macrocellulaires

À partir de nombreuses mesures effectuées dans les environs de TOKYO à différentes fréquences, OKUMURA a calculé l'affaiblissement médian en fonction de la distance. HATA a établi, à partir de ces courbes, des formules empiriques qui ont été reprises dans le rapport 567-4 du CCIR.

Ce modèle est souvent désigné sous le terme de formule d'OKUMURA-HATA ; il sert de base à une grande variété de modèles plus affinés. Il s'applique pour des tailles de cellules relativement grandes (de rayon supérieur ou égal à 1 [km]) et surtout lorsque l'antenne de la station de base est située au-dessus des niveaux des toits avoisinants. Plutôt que cette formule, valable pour des fréquences comprises entre 150 et 1000 [MHz], nous fournissons l'expression du modèle COST 231-HATA qui s'applique aux fréquences comprises entre 1500 [MHz] et 2000 [MHz].

En milieu urbain, l'affaiblissement L_u vaut, en [dB],

$$L_u = 46,33 + 33,9 \log(f) - 13,82 \log(h_b) - a(h_m) + [44,9 - 6,55 \log(h_b)] \log d + C_m \quad (10.95)$$

avec

- f la fréquence, d la distance, h_b , h_m , des hauteurs ; ces grandeurs sont exprimées respectivement en [MHz], [km] et [m].

- $a(h_m) = (1,1 \log(f) - 0,7)h_m - (1,56 \log(f) - 0,8)$ pour une ville de taille moyenne ; ce facteur de correction dépend de la hauteur de l'antenne du mobile mais également du type d'environnement.
- $C_m = 0 [dB]$ pour les villes de taille moyenne et les banlieues, et $C_m = 3 [dB]$ pour les grands centres métropolitains.

Nous renvoyons le lecteur à des ouvrages spécialisés [20, 22, 33] pour les conditions d'applicabilité de la formule et la description d'autres modèles.

10.3.5 Propagation à l'intérieur des bâtiments

À l'intérieur des bâtiments, le canal de propagation est sensiblement différent d'un milieu extérieur bien qu'il soit également le lieu d'évanouissements. Il existe deux types de propagation à l'intérieur des bâtiments –on parle de propagation *indoor*. Ceux-ci sont brièvement exposés ci-après.

Propagation “extérieur-intérieur”

La propagation *extérieur-intérieur* est caractérisée par le fait que l'émetteur est constitué d'une antenne utilisée pour les communications extérieures et le récepteur est situé à l'intérieur du bâtiment. Dans ce cas, l'atténuation est la somme d'un terme d'affaiblissement du signal provenant de l'environnement extérieur auquel s'ajoute un terme représentant les pertes subies par le signal lors de sa pénétration dans le bâtiment.

L'estimation de ces pertes de pénétration est rendue très difficile car elle dépend à la fois de la fréquence, de l'angle d'incidence, de la distance, du type de façade et de l'environnement et de l'architecture intérieure. Une solution pragmatique se base sur des campagnes de mesures. Celles-ci ont pour principal objectif de trouver des valeurs d'ingénierie permettant d'effectuer le dimensionnement du réseau de manière à permettre la communication pour un mobile se trouvant à l'intérieur d'un bâtiment.

Pour ce faire, on définit deux types de valeurs :

1. le *soft indoor*, représentant l'atténuation en façade, et
2. le *deep indoor*, représentant l'atténuation dans des endroits reculés du bâtiment.

Des valeurs typiques sont de $10 [dB]$ pour le *soft indoor* et de $20 [dB]$ pour le *deep indoor* à $900 [MHz]$. Ces valeurs interviendront lors de l'établissement du bilan de puissance. La hauteur de l'étage où se situe le récepteur influence également ces pertes : les pertes de pénétration diminuent approximativement de $1,5 [dB]$ par étage.

Il peut paraître curieux de pouvoir communiquer dans un bâtiment alors qu'il n'existe presque jamais de trajet direct (surtout en *deep indoor*). Cela s'explique par le fait que les ondes réussissant à pénétrer dans le bâtiment sont soumises principalement à trois phénomènes : la réflexion, la transmission et la diffraction (cf. figure 10.15).

Les ondes peuvent dès lors parvenir au récepteur par de multiples réflexions. Il arrive même que, par un effet guide d'ondes comme illustré à la figure 10.16, l'affaiblissement devienne inférieur à l'affaiblissement en espace libre.

Propagation “intérieur-intérieur”

Pour la propagation *intérieur-intérieur*, l'émetteur et le récepteur sont tous deux situés dans le bâtiment, on parle de pico-cellule. La propagation dans ce type de milieu est déterminée par des méthodes de lancé de rayons, l'environnement étant impossible à caractériser analytiquement ou empiriquement de manière précise.

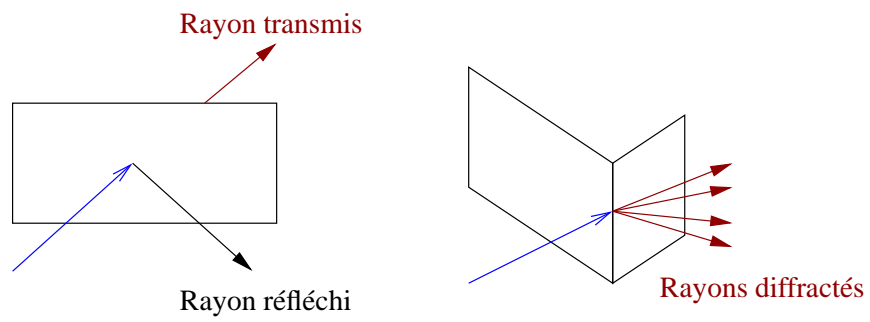


FIG. 10.15 – Transmission, réflexion et diffraction.

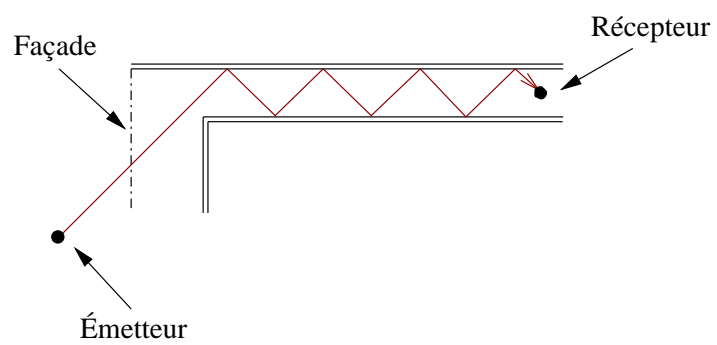


FIG. 10.16 – Effet guide d'ondes.

Annexe A

Quelques résultats

A.1 Gain et atténuation

Définition 43 [Gain et atténuation d'un système linéaire] Pour un système linéaire, le gain en puissance est le rapport entre la puissance de sortie et la puissance en entrée, l'atténuation étant le rapport inverse.

On définit parfois, par le biais de la réponse impulsionnelle, le carré du rapport des tensions ou courants de sortie et d'entrée en $[dB]$. Néanmoins, $\|\mathcal{H}(f)\|^2$ n'est pas toujours égal au gain en puissance du circuit.

A.2 Notation phasorielle

Dans tout circuit, sans source d'énergie, les courants sont amortis et s'annulent au cours du temps. L'application de sources de tension ou de courant sinusoïdaux engendre des courants qui, après disparition des régimes transitoires, sont sinusoïdaux et de même fréquence que celle des sources si tous les éléments du circuit ont des caractéristiques linéaires. C'est le *régime sinusoïdal permanent*. Dès lors, la réponse d'un circuit à l'excitation sinusoïdale sera décrite, en fonction de la fréquence, par sa *fonction de transfert*. La linéarité des équations joue ici un rôle essentiel.

À chaque grandeur physique évoluant sinusoïdalement, on associe une grandeur complexe, dont la partie réelle sera identifiée avec la grandeur physique à décrire, et dont l'amplitude complexe, qui en regroupe l'amplitude et la phase, sera la grandeur utile.

Définition 44 Considérons une grandeur sinusoïdale $x(t) = X \cos(\omega t - \theta)$. On lui associe le phaseur

$$\hat{X} = X e^{j\theta} \quad (\text{A.1})$$

L'expression temporelle est la partie réelle du phaseur préalablement multiplié par l'exponentielle imaginaire $e^{j\omega t}$. En effet,

$$x(t) = \operatorname{Re}(\hat{X} e^{j\omega t}) \quad (\text{A.2})$$

$$= \operatorname{Re}(X e^{j(\omega t + \theta)}) \quad (\text{A.3})$$

$$= X \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{A.4})$$

Le phaseur est un concept purement mathématique ; il n'a pas de signification physique mais il permet de simplifier l'expression et le calcul de certaines expressions. Ainsi,

$$\frac{\partial(\widehat{X}e^{j\omega t})}{\partial t} = j\omega\widehat{X}e^{j\omega t} \quad (\text{A.5})$$

et

$$\int \widehat{X}e^{j\omega t} dt = \frac{\widehat{X}e^{j\omega t}}{j\omega} \quad (\text{A.6})$$

A.2.1 Impédance complexe

Soit un circuit formant un dipôle électrocinétique que l'on supposera *passif*, c'est-à-dire qu'il ne comporte pas de générateur. Supposons tous ses éléments linéaires ; à toute excitation sinusoïdale $v(t) = V \cos(\omega t)$ entre ses bornes, correspond un courant $i(t) = I \cos(\omega t - \phi)$.

En utilisant la notation phasorielle, l'*impédance complexe* est définie par la relation

$$\widehat{V} = \widehat{Z}\widehat{I} \quad (\text{A.7})$$

\widehat{Z} est donc de la forme Ze^{ϕ} . Son module Z , simplement appelé *impédance*, est égal au rapport des amplitudes V et I ; il se mesure en ohms $[\Omega]$.

A.2.2 Puissance en régime sinusoïdal

Soient $v(t) = V \cos(\omega t)$ la tension aux bornes du dipôle étudié et $i(t) = I \cos(\omega t - \phi)$ l'intensité qui le parcourt. Le dipôle reçoit la *puissance électrocinétique instantanée*

$$v(t)i(t) = VI \cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi) \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{VI}{2} (\cos \phi + \cos(2\omega t - \phi)) \quad (\text{A.9})$$

Cette puissance varie au cours du temps de façon sinusoïdale à la fréquence angulaire 2ω , autour d'une valeur P_m , appelée *puissance moyenne*

$$P_m = \frac{VI}{2} \cos \phi \quad (\text{A.10})$$

P_m est exactement la moyenne de la puissance reçue par le circuit lorsqu'elle est calculée sur un nombre entier de périodes.

En notation phasorielle,

$$\widehat{P} = \text{Re}(\widehat{V}e^{j\omega t}) \text{Re}(\widehat{I}e^{j\omega t}) \quad (\text{A.11})$$

$$= \left(\frac{\widehat{V}e^{j\omega t} + \widehat{V}^*e^{-j\omega t}}{2} \right) \left(\frac{\widehat{I}e^{j\omega t} + \widehat{I}^*e^{-j\omega t}}{2} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$= \text{Re} \left(\frac{\widehat{V}\widehat{I}^*}{2} \right) + \text{Re} \left(\frac{\widehat{V}\widehat{I}^*e^{2j\omega t}}{2} \right) \quad (\text{A.13})$$

Pour un *circuit passif*, d'impédance complexe $\widehat{Z} = R + jS$, la puissance moyenne vaut alors

$$P_m = \text{Re} \left(\frac{(R + jS) \|I\|^2}{2} \right) = \frac{RI^2}{2} \quad (\text{A.14})$$

Seule la partie réelle de l'impédance intervient.

A.3 Adaptation d'impédance

Considérons une force électromotrice sinusoïdale d'amplitude V et d'impédance interne \hat{Z}_s . Relions ses bornes à celles d'un circuit d'utilisation d'impédance \hat{Z}_L , et cherchons la valeur de \hat{Z}_L pour laquelle la puissance moyenne fournie au circuit est maximale. En posant $\hat{Z}_s = R_s + jS_s$ et $\hat{Z}_L = R_L + jS_L$, on montre aisément que la puissance moyenne dissipée P_d dans la charge est maximale lorsque $R_s = R_L$ et $S_s = S_L$, soit lorsque

$$\hat{Z}_L = \hat{Z}_s^* \quad (\text{A.15})$$

On dit alors que l'impédance du circuit d'utilisation est adaptée à celle du générateur. La puissance fournie est maximale et vaut

$$P_d = \frac{V^2}{8R} \quad (\text{A.16})$$

Notons qu'une puissance égale est dissipée dans le générateur, ce qui diminue pour de nombreuses applications l'intérêt de cette adaptation.

Index

A

accès
 multiple, 105
adaptation d'impédance, 191
ASK, 59
atténuation, 137

B

bande
 de base, 25
 de garde, 106
 utile, 25
bande vocale, 147
biais, 18
bit, 159
 d'information, 159
bruit, 98, 138
 bande passante, 47
 facteur, 48, 50
 température, 46, 47, 51
 thermique, 43

C

câble, 138
canal, 159
capacité, 103, 161
CDM, 88
CDMA, 88, 105
cellule, 183
charge, 121
 écoulée, 121, 122
 d'un réseau, 120
 de référence, 122
 offerte, 122
chip, 88
circuit, 120, 147
coaxe, 138
code, 88
 de Gold, 116
 d'étalement, 96
composante
 en phase, 28

 en quadrature, 28
congestion, 119, 131
consistant, 18
constellation, 60
convergence, 9
cosinus surélevé, 85
couverture, 172
critère
 de Nyquist, 80

D

décibel, 143
dénombrement, 123
détecteur d'enveloppe, 35
densité
 Rayleigh, 175
 Rice, 179
DFT, 11
diagramme des états de phase, 60
diaphonie, 149
dimensionnement, 132
discriminateur, 35
dispersion, 138
distorsion, 138
Doppler, 166, 179
 spectre, 182
DS, 88
dtFT, 8
DWDM, 105

E

échantillonnage, 26
effet de fenêtrage, 23
effet de masque, 169
effet Doppler, 166, 179
efficacité spectrale, 55
énergie, 11
entropie
 conditionnelle, 160
entropie de source, 159
enveloppe, 30
enveloppe complexe, 31

équations des télégraphistes, 141

Erlang, 121

B, 129, 131

table, 132

estimateur, 17

estimation, 17

étalement

capacité, 103

de spectre, 87

direct, 88

gain, 101

par sauts de fréquence, 87

évanouissement, 166, 176

lent, 169

F

facteur

de bruit, 48

de bruit moyen, 50

de mérite, 51

facteur d'occupation, 104

facteur de rolloff, 85

fading, 166

FD/CDMA, 117

FD/TDMA, 116

FDD, 116

FDD/TDD, 116

FDMA, 105

fenêtrage, 23

FEXT

puissance, 157

FH, 87

FM

démodulation, 35

formule d'Erlang B, 131

Fourier

transformée à temps discret, 8

transformée discrète, 11

fréquence

normalisée, 8

réduite, 8

Frequency Hopping, 87

Friis, 165

FTP, 145

G

gain d'étalement, 101

GMSK, 75

Gold, 116

groupe de base, 108

GSM, 87, 166

H

Hata, 185

Hilbert

transformée, 30

I

impédance

adaptation, 191

impédance caractéristique, 142

indoor, 186

information, 159

mutuelle, 160

intensité de trafic, 121

intercorrélation partielle, 116

interférence, 77

interférence inter-symboles, 77

intervalle de confiance, 19

IS-95, 102

L

ligne, 138

à paire coaxiale, 145

à paire torsadée, 144

symétrique, 137

line of sight (LOS), 165

log-normale, 170

loi

log-normale, 170

M

médiane, 20

macro-cellule, 183

marge d'interférence, 102

masquage, 169

matrice de canal, 160

micro-cellule, 183

modulation, 94

à décalage, 56, 67

angulaire, 56

ASK, 59

classique, 56

linéaire, 56

MSK, 72

numérique, 55

OQPSK, 69

PSK, 61

QPSK, 62

modulation à décalage, 67

MSK, 72

multiplexage, 105

en fréquences, 105, 106

par répartition de codes, 113

temporel, 105, 108

N

Néper, 143

Nyquist

critère, 80

O

Okumura-Hata, 185

OQPSK, 69

P

périodigramme, 22

paire coaxiale, 138

paire torsadée, 138

paquet, 147

paquets, 120

paradiaphonie, 149

paramètres

primaires, 141

Parseval, 11

passe-bande, 25

représentation, 31

passe-bas

équivalent, 27

path loss, 169

PCM, 112

phaseur, 189

pico-cellule, 183

Poisson

espérance, 125

processus, 126

variable aléatoire, 124, 125

variance, 125

précision, 12

pseudo-aléatoire, 90

PSK, 61

PSK-4, 62

puissance

disponible, 45

Q

QPSK, 62

démodulation, 66

quarte, 149, 151

R

résistivité, 139

résolution, 12, 13

Rayleigh, 175

Rice, 179

décomposition, 32

rolloff, 85

S

séquence

de longueur maximale, 90

pseudo-aléatoire, 91

séquence pseudo-aléatoire, 90

sensibilité, 166

sensibilité du mobile, 166

shadowing, 169

Shannon

théorème, 163

signal analytique, 29

signalisation, 113, 120

source, 159

spectre, 9

d'amplitude, 9

Doppler, 182

splitter, 148

STP, 145

T

télédiaphonie, 149

TDD, 116

TDMA, 105

télégraphistes

équations, 141

température

de bruit, 47, 51

de bruit ponctuelle, 46

théorème de Shannon, 163

trafic

écoulé, 121

étude, 119

intensité, 121

trame, 110

transformée de Hilbert, 30

transmission sur ligne, 137

treillis de phase, 73

twisted pair, 145

W

WDM, 105

Glossaire

- ADSL** *Asymmetric Digital Subscriber Line*. Technologie permettant la transmission de signaux numériques à haut débit (jusqu'à plusieurs Mégabits par seconde) sur une paire torsadée. Le débit est asymétrique ; il est plus important du central vers l'abonné qu'en retour. Le système ADSL est compatible avec le signal téléphonique. 105, 142, 148
- BPSK** *Binary Phase Shift Keying*. Modulation numérique de phase à 2 états. Il s'agit d'un cas particulier des modulations numériques de phase à plusieurs états (PSK). 55
- CDMA** *Code Division Multiple Access*. Technologie de transmission numérique permettant la transmission de plusieurs flux simultanés par répartition de code. Cette technologie permet une utilisation permanente de la totalité de la bande de fréquences allouée à l'ensemble des utilisateurs. La technologie prévoit un mécanisme d'accès aux ressources. 105
- cellule** En radiocommunications, zone géographique élémentaire d'un réseau radiocellulaire à laquelle on affecte un ensemble de fréquences non réutilisables dans les zones contiguës. C'est également le nom donné à un paquet ATM qui a une taille de 53 bytes dont 48 sont destinées à recevoir les données d'un utilisateur. 183
- DFT** *Discrete FOURIER Transform*. La transformée de FOURIER discrète s'obtient par échantillonnage de la transformée continue. 11
- Duplex** Terme utilisé en télécommunications pour désigner une communication bidirectionnelle. 116
- FDM** *Frequency Division Multiplexing*. Mécanisme de répartition de ressources par multiplexage fréquentiel. 105
- FDMA** *Frequency Division Multiple Access*. Technique de répartition de ressources par multiplexage fréquentiel. Cette technique prévoit un mécanisme d'accès aux ressources. 105
- FEXT** *Far-End Crosstalk*. Interférence électromagnétique entre deux paires de cuivre considérée à l'extrémité réceptrice. Également appelée télédiaphonie. 150
- GSM** *Global System for Mobile Communications*. Standard de téléphonie mobile adopté en Europe, en Asie et en Australie. 116
- IS-95** Norme américaine de réseau cellulaire (dit de seconde génération ou 2G) basée sur la méthode d'accès CDMA. 102
- LOS** *Line Of Sight*. Terme qui désigne qu'un émetteur et un récepteur sont en ligne de vue, c'est-à-dire que, parmi tous les trajets reliant l'émetteur et le récepteur, un trajet est nettement moins atténués que les autres. La visibilité en ligne de vue n'exclut pas les trajets multiples, contrairement à la visibilité en espace libre. 165
- modem** *modulateur démodulateur*. Appareil transmettant des signaux numériques sur le réseau téléphonique analogique. Offre les fonctions de numérotation, de connexion, et éventuellement de compression et de correction d'erreur. 147
- modulation** Technique consistant à modifier l'amplitude, la phase ou la fréquence d'une onde sinusoïdale, appelée porteuse, au moyen d'un signal à transmettre, appelé signal modulant. Grâce à la modulation, on peut translater le contenu fréquentiel d'un signal modulant ; ce procédé permet de partager le spectre de fréquences entre plusieurs utilisateurs. Pour retrouver le signal modulant original, il faut procéder à une démodulation. 55

MSK	<i>Minimum Shift Keying</i> . Technique de modulation numérique consistant à effectuer une fonction XOR entre 2 bits successifs préalablement à une modulation de fréquence à 2 états.	55
multiplexage	Terme technique utilisé en télécommunications pour désigner un procédé qui consiste à partager des ressources entre plusieurs utilisateurs. Dans un autre contexte et lorsqu'on parle de signaux, il s'agit d'une manière de combiner plusieurs signaux.	105
NEXT	<i>Near-End Cross(X) Talk</i> . Mesure de la paradiaphonie d'un câble de cuivre.	150
NRZ	<i>Non Return to Zero</i> . Méthode de représentation de signaux numériques. Cette méthode représente les symboles numériques par des niveaux de tension constants pendant toute la durée du symbole.	55, 57
OSI	<i>Open System Interconnection</i> . Standard de référence d'interconnexion de réseaux développé par l'OSI. Ce système est différent du modèle Internet.	1
PSK	<i>Phase Shift Keying</i> . Modulation numérique de phase à plusieurs états. Technique de modulation consistant à sélectionner des échantillons d'une porteuse à amplitude constante mais avec plusieurs états de phase possibles.	61
QPSK	<i>Quadrature Phase Shift Keying</i> . Technique de modulation numérique consistant à appliquer une modulation des états de phase tant sur une porteuse en cosinus que sur la porteuse en sinus.	55
RNIS	<i>Réseau Numérique à Intégration de Services</i> . Désigne le réseau téléphonique numérique. Au niveau du réseau, les signaux numériques utiles sont transmis à des multiples de 64[kb/s].	147
TDM	<i>Time Division Multiplexing</i> . Mécanisme de répartition de ressources par multiplexage temporel.	105, 108
TDMA	<i>Time Division Multiple Access</i> . Technique de répartition de ressources par multiplexage temporel. Cette technique prévoit un mécanisme d'accès.	105
UTP	<i>Unshielded Twisted Pair</i> . Désigne un câble non blindé composé de 4 paires en cuivre. La norme EIA-TIA 586 définit 5 catégories de câbles de ce type.	145

Bibliographie

- [1] J. Anderson. *Digital transmission engineering*. IEEE Press, Prentice Hall, 1999. 182
- [2] J. Bellamy. *Digital telephony*. John Wiley & Sons, third edition, 2000.
- [3] J. Bic, D. Duponteuil, et J. Imbeaux. *Elements of digital communications*. John Wiley & Sons, 1991. 55
- [4] J. Bingham. *ADSL, VDSL, and multicarrier modulation*. Wiley, 2000.
- [5] G. Blanchet et M. Charbit. *Traitement numérique du signal : simulation sous matlab*. Hermès, 1998. 6, 9, 12, 15, 16, 23
- [6] J. Candy. *Signal processing : The modern approach*. McGraw-Hill, 1988. 6, 23
- [7] M. Capinski and E. Kopp. *Measure, integral and probability*. Springer, 1999. 174
- [8] M. Charbit. *Éléments de théorie du signal : les signaux aléatoires*. Ellipses, 1990. 5
- [9] W. Chen. *DSL Simulation techniques and standards development for digital subscriber line systems*. Macmillan Technical Publishing, 1998.
- [10] P. Clerc et P. Xavier. *Principes fondamentaux des télécommunications*. Ellipses, 1998. 114
- [11] P. Delogne. Estimation spectrale de séquences aléatoires. Chapitre 7 du cours de traitement numérique du signal, Université catholique de Louvain, 40 pages, Mai 1994.
- [12] C. Demoulin and M. Van Droogenbroeck. Principes de base du fonctionnement du réseau gsm. *Revue de l'AIM*, (4) :3–18, 2004. 87
- [13] P. Fraisse, R. Protière, et D. Marty-Dessus. *Télécommunications 1 : transmission de l'information*. ellipses, 1999. 146
- [14] D. Ginsburg. *Implementing ADSL*. Addison-Wesley, 1999.
- [15] M. Hayes. *Statistical digital signal processing and modelling*. John Wiley & Sons, 1996. 5, 6, 23
- [16] S. Haykin. *Communication system*. John Wiley & Sons, 1994. 39, 93, 94, 95, 101, 116
- [17] S. Keshav. *An engineering approach to computer networking : ATM networks, the Internet, and the telephone network*. Addison-Wesley, 1997. 116
- [18] D. Kingdom. Frequency-division multiplexing. In J. Flood and P. Cochrane, editors, *Transmission systems*, volume 27 of *IEE Telecommunications*, chapter 5, pages 110–149. Peter Peregrinus Ltd., 1991. 109
- [19] X. Lagrange. *Les réseaux radiomobiles*. Hermès, 2000. 183
- [20] X. Lagrange, P. Godlewski, et S. Tabbane. *Réseaux GSM-DCS*. Hermès, troisième édition, 1997. 167, 172, 186
- [21] F. Lapierre. *Estimation des seuils de design pour la couverture Indoor*. Travail de fin d'études, Université de Liège, Juin 2000. 177

- [22] J. Lee and L. Miller. *CDMA systems engineering handbook*. Artech House, 1998. 87, 131, 132, 134, 170, 176, 186
- [23] W. Lee. *Mobile communications design fundamentals*. John Wiley & Sons, second edition, 1993.
- [24] H. Meyr, M. Moeneclaey, and S. Fechtel. *Digital communication receivers : synchronisation, channel estimation and signal processing*. John Wiley & Sons, 1998. 27
- [25] A. Papoulis. *Probability, random variables, and stochastic processes*. McGraw-Hill, 1984. 175
- [26] C. Paul and S. Nasar. *Introduction to electromagnetic fields*. McGraw-Hill, 1987. 181, 184
- [27] D. Rauschmayer. *ADSL/VDSL principles : a practical and precise study of asymmetric digital subscriber lines and very high speed digital subscriber lines*. Macmillan Technical Publishing, 1999.
- [28] T. Saaty. *Elements of queueing theory with applications*. Dover, 1961.
- [29] S. Saunders. *Antennas and propagation for wireless communication systems*. John Wiley & Sons, 1999.
- [30] C. Servin. *Télécoms 2 : de l'ingénierie aux services*. InterÉditions, 1998. 122, 145
- [31] M. Simon and M.-S. Alouini. *Digital communication over fading channels : a unified approach to performance analysis*. Wiley, 2000. 179
- [32] T. Starr, J. Cioffi, and P. Silverman. *Understanding digital subscriber line technology*. Prentice Hall, 1999.
- [33] R. Steele and L. Hanzo. *Mobile radio communications : second and third generation cellular and WATM systems*. John Wiley & Sons, second edition, 1999. 186
- [34] J. Walrand and P. Varaiya. *Communication networks : a first course*. McGraw-Hill, 1998. 137
- [35] R. Yates and D. Goodman. *Probability and stochastic processes : a friendly introduction for electrical and computer engineers*. John Wiley & Sons, 1999. 125
- [36] R. Ziemer and W. Tranter. *Principles of communications : systems, modulation and noise*. John Wiley & Sons, fourth edition, 1995. 30, 44